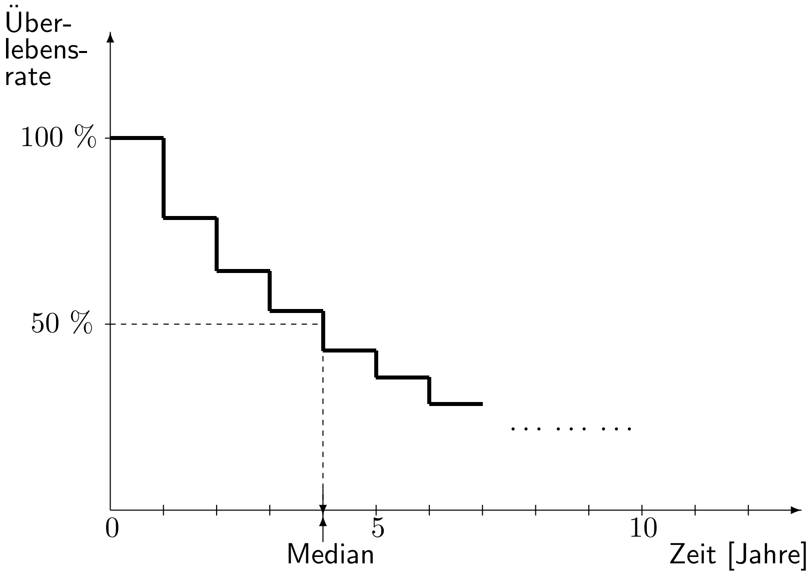
Die mediane Überlebenszeit

Klaus Pommerening

April 2017

Graphische Veranschaulichung

Die mediane Überlebenszeit ist die Zeit, nach der noch genau die Hälfte einer Population unter Risiko am Leben ist. Wenn man die Überlebenszeit-Kurve (Kaplan-Meier-Kurve) hat, kann man die mediane Überlebenszeit so ablesen:



Man geht also von der 50%-Marke auf der y-Achse nach rechts, bis man auf die Kaplan-Meier-Kurve stößt. Von dort geht man nach unten bis zur x-Achse und liest die mediane Überlebenszeit ab. Bis zu diesem Zeitpunkt überlebt also (ziemlich) genau die Hälfte der Population.

Bestimmung aus der Risikorate

Gegeben:

- eine Population der Größe N unter Beobachtung,
- die (Sterbe-) Risikorate pro Jahr r.

Das bedeutet:

Nach 1 Jahr leben noch $N \cdot (1-r)$ Individuen.
Nach 2 Jahren leben noch $N \cdot (1-r)^2$ Individuen.
...
Nach k Jahren leben noch $N \cdot (1-r)^k$ Individuen.

Frage Wie kann man aus diesen Daten den Median der Überlebenszeit bestimmen?

Herleitung einer Formel

Die Frage bedeutet: Nach welcher Zahl k von Jahren leben noch 50% der Individuen? Mathematisch ausgedrückt:

Für welches k gilt

$$N \cdot (1-r)^k = \frac{1}{2} \cdot N\,?$$

Aus dieser Gleichung kürzt sich N heraus, und die Auflösung nach k ergibt eine Formel, die k (die mediane Überlebenszeit) durch r (die Riskorate) ausdrückt:

$$\begin{aligned}
(1-r)^k &= \frac{1}{2}, \\
k \cdot \log(1-r) &= -\log 2, \\
k \cdot \log \frac{1}{1-r} &= \log 2,
\end{aligned}$$

weil $-\log(1-r) = \log \frac{1}{1-r}$.

Die gesuchte Formel ist

$$k = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1-r}}$$

Rechenbeispiel 1

$r = 0.05 = 5\%$, also $1 - r = 0.95$.

Mit dem Taschenrechner rechnet man aus

$$k = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{0.95}} \approx \frac{\log 2}{\log 1.053} \approx \frac{0.301}{0.0224} \approx 13.4$$

Probe durch Nachzählen für $N = 100$:

Jahr	1	2	3	4	5	...	13	14
Überlebende	95	90.25	85.7	81.5	77.4	...	51.3	48.8

Das passt: Der Median (50 Überlebende) liegt zwischen 13 und 14 Jahren.

Rechenbeispiel 2

$r = 0.09 = 9\%$, also $1 - r = 0.91$. Der Taschenrechner sagt

$$k = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{0.91}} \approx \frac{\log 2}{\log 1.099} \approx \frac{0.301}{0.0410} \approx 7.34$$