Wie hoch muß ein Turm sein, damit ich ihn sehe? (Z. B. beim Blick von Konstanz nach Bregenz)

Klaus Pommerening

März 2020 (Korrekturen 9. Oktober 2022)

Fragestellung

Ein Beobachter steht am Punkt B der Erdoberfläche (sagen wir, in Konstanz) und blickt aus der Höhe h (sagen wir, von der 40 m hohen Aussichtsplattform des Münsterturms) über eine ebene Wasserfläche (sagen wir, über den Bodensee) in Richtung des Punkts A (sagen wir, in Richtung Bregenz), der von A die Entfernung c (sagen wir, 46 km) hat. Dabei wird c auf der gekrümmten Erdoberfläche gemessen. Diese Krümmung der Erdoberfläche ist auch die Ursache dafür, dass er A selbst eventuell gar nicht sieht, sondern nur eine Stelle (sagen wir am Hang des Pfänders), die mindestens die Höhe x hat. *Wie groß ist dieser Wert x?*

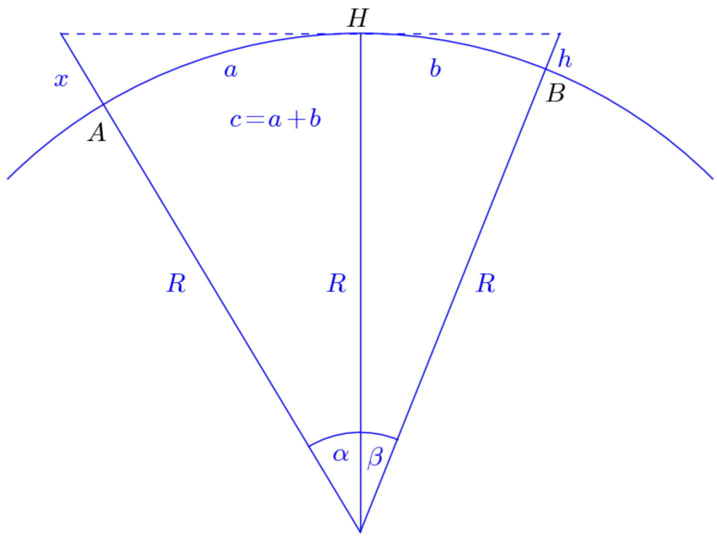

Abbildung 1: Der Blick von B nach A.

Wir ziehen also eine Tangente an die Erdkugel von einem Punkt der Höhe h senkrecht über B in Richtung A und fragen, in welcher Höhe x diese Tangente die Senkrechte über A trifft. Der Hilfspunkt H ist der „Horizontpunkt“, d. h., der Punkt an dem die Tangente die Kugel berührt.

Gegebene Größen

- $R =$ der Erdradius[1] (konkret 6360 km als Näherungswert),
- $h =$ die Augenhöhe des Beobachters,
- $c =$ die Entfernung von A nach B, auf der Erdoberfläche gemessen (in Abbildung 1 in $a + b$ zerlegt).

Gesuchte Größe

- $x =$ die minimale Höhe eines Punktes über A, den der Beobachter sehen kann.

Natürlich setzen wir klare Sicht voraus. Bei Nebel sind unsere Berechnungen gegenstandslos.

Hilfsgrößen

- $b =$ die Entfernung des (nicht weiter interessierenden) Horizontpunkts H von B,
- $a =$ die Entfernung zwischen H und A,
- $\alpha =$ der Winkel zwischen den Erdradien nach A und H,
- $\beta =$ der Winkel zwischen den Erdradien nach B und H.

Dabei ist $c = a + b$.

Beziehungen der Größen zueinander

$$\cos\beta = \frac{R}{R+h}\,, \qquad \beta = \arccos\frac{R}{R+h}\,, \tag{1}$$

$$b = \beta \cdot R\,, \tag{2}$$

$$a = c - b\,, \tag{3}$$

$$\alpha = \frac{a}{R}\,, \tag{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+x}\,, \tag{5}$$

wobei wir alle Winkel im Bogenmaß angeben. Die letzte Gleichung (5) ergibt die Lösungsformel

$$x = \frac{R}{\cos\alpha} - R\,, \tag{6}$$

[1]eigentlich der Krümmungsradius der Erde in der betrachteten Gegend

die im Rahmen unserer Modellannahmen (kugelförmige Erde) exakt ist. Auf das sukzessive Einsetzen der Zwischengrößen, rückwärts entlang der Gleichungskette (5)–(1), verzichten wir lieber, da die Formel dann unästhetisch wird. Für eine konkrete Berechnung hangelt man sich besser an der Reihe der Formeln entlang.

Beispiel

Bestimmen wir die Höhe x in unserem Zahlenbeispiel mit $h = 40$, $c = 46000$ und $R = 6360000$:

$$\beta = \arccos \frac{R}{R+h} \approx 0.003547\,, \tag{7}$$

$$b = \beta \cdot R \approx 22556\,, \tag{8}$$

$$a = c - b \approx 23443\,, \tag{9}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} \approx 0.003686\,, \tag{10}$$

$$x = \frac{R}{\cos\alpha} - R \approx 43.2\,. \tag{11}$$

Von einer Augenhöhe 40 m in Konstanz sehen wir also Gebäude in Bregenz, die mindestens ca. 43 m hoch sind.

Begeben wir uns in Konstanz ans Seeufer und mit den Augen ganz an den Wasserspiegel ($h = 0$), so vereinfacht sich die Rechnung: H wird zu B, also $\beta = 0$ und $b = 0$, $a = c$,

$$\alpha = \frac{c}{R} \approx 0.007233\,, \tag{12}$$

$$x = \frac{R}{\cos\alpha} - R \approx 166.36\,. \tag{13}$$

Wir sähen also den Hang des Pfänders erst ab einer Höhe von ca. 166 m. Genau so hoch müssten wir in Konstanz steigen, um das Seeufer in Bregenz zu sehen. Um dies mit den Bezeichnungen aus Abbildung 1 (jetzt mit $\alpha = 0$, $a = 0$ und $c = b$) in Übereinstimmung zu bringen, schreiben wir die Formel (13) für dieses Szenario um als

$$h = \frac{R}{\cos(b/R)} - R\,. \tag{14}$$

Näherungsformeln

Ohne Verwendung der trigonometrischen Funktion cos – aber dafür mithilfe des Satzes von Pythagoras – können wir die Näherungsformel

$$h \approx -R + \sqrt{R^2 + b^2} \tag{15}$$

aufstellen. Diese ist für kleine Werte von b ausreichend genau und entsteht aus der approximativen Beziehung

$$(R+h)^2 \approx R^2 + b^2\,, \tag{16}$$

siehe Abbildung 1. (Sie kann so gedeutet werden, dass der Tangens durch das Bogenmaß ersetzt wird, was bei kleinen Winkeln eine gute Näherung ist.) In unserem Zahlenbeispiel „Konstanz-Bregenz“ erhalten wir als Rechenergebnis bis auf die Nachkommastelle den gleichen Wert 166.6 m.

Umgekehrt können wir die Näherungsformel (16) auch verwenden, um die Entfernung b zum Horizont aus Sichthöhe h zu bestimmen:

$$b \approx \sqrt{2Rh + h^2}\,. \tag{17}$$

Falls h hinreichend klein im Vergleich zu R ist – in unserem Anwendungsszenario eine sehr realistische Annahme –, können wir den Term h^2 unter der Wurzel vernachlässigen und erhalten die oft genannte Näherungsformel[2]

$$b \approx \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h}\,. \tag{18}$$

In unserem Zahlenbeispiel mit $R = 6360000$, $h = 40$ ergibt dies als Näherungswert $b \approx 22560$, also rund 23 km für die Entfernung des Horizonts vom Beobachter, was wir auch schon mit der exakten Formel (8) berechnet hatten.

Die Wölbung

Oft (zum Beispiel an der Konstanzer Uferpromenade oder in der Wikipedia[3]) wird auch eine andere Größe angegeben: *Wie hoch wölbt sich der Bodensee zwischen Konstanz und Bregenz?*

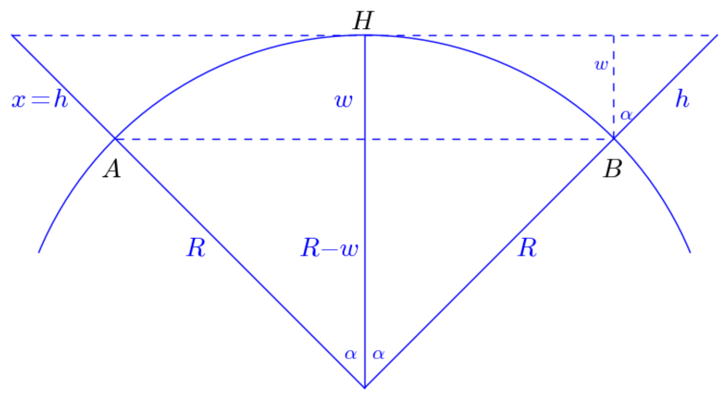

Abbildung 2: Die Wölbung der Erde zwischen A und B.

Mathematisch ausgedrückt betrachten wir die Sehne von A nach B und wollen den maximalen Abstand w zwischen dieser Sehne und dem darüber liegenden Kreisbogen bestimmen.

[2] Wikipedia, Stichwort „Erdkrümmung“, dort nach h aufgelöst

[3] Stichwort „Bodensee“, Abschnitt „Erdkrümmung“

Im Vergleich mit Abbildung 1 haben wir die speziellere Situation, dass der Punkt H genau auf halbem Weg von A nach B liegt, und daher $b = a = c/2$ und $\beta = \alpha = c/2R$ ist. Damit ist dann $R - w = R\cos\alpha$, also

(19) $$w = R - R\cos\alpha = R \cdot (1 - \cos\alpha)\,.$$

Für die Höhe der Wölbung des Bodensees zwischen Konstanz und Bregenz ergibt die Formel im Zahlenbeispiel das Ergebnis

(20) $$\alpha = \frac{c}{2R} \quad\approx\quad 0.003616\,,$$

(21) $$w = R \cdot (1 - \cos\alpha) \quad\approx\quad 0.0416\,,$$

also rund 41.6 m.
Wie aus dem kleinen Dreieck rechts oben in Abbildung 2 ersichtlich ist, ist übrigens $w = h\cos\alpha$. Im Rahmen der hier angenommenen Größenordnungen – c sehr klein im Vergleich zu R – ist $\cos\alpha \approx 1$ und $h \approx w$ eine brauchbare Näherung.
Eine „Trigonometrie-freie“ Näherungslösung für w erhalten wir wieder mit dem (näherungsweisen) Satz von Pythagoras,

(22) $$R^2 \approx (R - w)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 ,$$

durch Auflösen der quadratischen Gleichung nach w, nämlich

(23) $$w \approx R - \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$$

(das Pluszeichen vor der Wurzel würde uns weit in den Weltraum katapultieren). Im Zahlenbeispiel „Konstanz-Bregenz“ ist das Ergebnis im Rahmen unserer Rechengenauigkeit auch wieder 41.6 m.