Die Stirling-Formel

James Stirling: *Methodus Differentialis*, 1730

Approximationsformeln

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt näherungsweise

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

oder genauer

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n}\right)$$

oder als asymptotische Formel und noch genauer

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^5})\right)$$

Abschätzung des Restglieds

Mathematisch von besonderem Interesse sind natürlich Formeln, die exakte Grenzen angeben, wie

Satz 1 (Stirling-Formel) *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt*

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}}$$

Beweis. Zuerst wird gezeigt, daß die Folge

$$a_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \cdot \sqrt{n}}$$

monoton fällt; da alle Folgenglieder positiv sind, konvergiert sie also.

Die Division aufeinanderfolgender Glieder ergibt

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!(\frac{n+1}{e})^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}}{(\frac{n}{e})^n \cdot \sqrt{n} \cdot (n+1)!} = \frac{1}{e} \cdot (\frac{n+1}{n})^{n+1/2},$$

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = -1 + (n + \frac{1}{2}) \cdot \log \frac{n+1}{n}.$$

Für $|x| < 1$ gilt die Potenzreihen-Entwicklung

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot (x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots),$$

also für $0 < x < 1$ die Abschätzung

$$2x < \log \frac{1+x}{1-x} < 2 \cdot (x + \frac{x^3}{3} \cdot (1 + x^2 + x^4 + \cdots))$$

$$= 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{1-x^2} = 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}(\frac{1}{x^2} - 1)}.$$

Setzt man $x = 1/(2n+1)$, so ist

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n},$$

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)((2n+1)^2-1)},$$

$$1 < (n + \frac{1}{2}) \cdot \log \frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4n^2+4n},$$

$$0 < \log \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12} \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}).$$

Aus der linken Ungleichung folgt, wie behauptet, $a_n > a_{n+1}$.

Sei nun $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann ist $a \geq 0$ und

$$0 < \log \frac{a_n}{a_{n+k}} < \frac{1}{12} \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k});$$

für $k \to \infty$ folgt

$$0 \leq \log \frac{a_n}{a} \leq \frac{1}{12n},$$

$$1 \leq \frac{a_n}{a} \leq e^{1/12n}.$$

Zum Beweis der Stirling-Formel ist also nur noch $a = \sqrt{2\pi}$ zu zeigen.

Aus der Produktformel von Wallis, siehe den folgenden Hilfssatz 1, folgt mit $k! = a_k k^{k+1/2}/e^k$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 \cdot n^{2n+1} \cdot 2^{2n} \cdot e^{2n}}{e^{2n} \cdot a_{2n} \cdot (2n)^{2n+1/2} \cdot \sqrt{n+1/2}}$$

$$= a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n+1/2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Also ist $a = \sqrt{2\pi}$. $\diamond$

Hilfssatz 1 (Produktformel von Wallis)

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{n+1/2}}.$$

Beweis. Aus der Produktentwicklung der Sinus-Funktion,

$$\sin(\pi x) = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{x^2}{k^2})$$

folgt für $x = 1/2$

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 1}{4k^2},$$

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^4}{(2k-1)2k \cdot 2k(2k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} \cdot (n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)},$$

und daraus direkt die Behauptung. ◇

Korollar 1 (i) *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt*

$$\sqrt{2\pi n} \leq \frac{n!e^n}{n^n} < \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \frac{1}{11n}) < \sqrt{2\pi n} + \frac{0.23}{\sqrt{n}}.$$

(ii) *Für $n \to \infty$ gilt*

$$\frac{n!e^n}{n^n} = \sqrt{2\pi n} + \mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Beweis. Für $0 < x < 1$ ist

$$e^x < 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{1/x - 1}.$$

Also folgt für $x = 1/12n$

$$e^{1/12n} < 1 + \frac{1}{12n - 1} \leq 1 + \frac{1}{11n}.$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $\sqrt{2\pi}/11 < 0.23$. ◇

Korollar 2 (i) *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} - \frac{1}{12n\sqrt{2\pi n}} \leq \frac{n^n}{n!e^n} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

(ii) *Für $n \to \infty$ gilt*

$$\frac{n^n}{n!e^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + \mathrm{O}(n^{-3/2}).$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \geq \frac{n^n}{n!e^n} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \cdot (1 - \frac{1}{12n}),$$

die zweite unmittelbar aus der ersten. ◇