

2 Die hypergeometrische Verteilung

Das Urnenmodell für die hypergeometrische Verteilung ist die „Ziehung ohne Zurücklegen“. Die Urne enthalte n Kugeln, davon s schwarze und $w = n - s$ weiße. Der Anteil

$$p := \frac{s}{n}$$

der schwarzen Kugeln sei bekannt und o. B. d. A. $p > \frac{1}{2}$. (Der Fall $p = \frac{1}{2}$ ist uninteressant, der Fall $p < \frac{1}{2}$ symmetrisch zum ersten.)

In der Anwendung auf die lineare Kryptoanalyse werden die Kugeln alle möglichen Klartexte sein und die „Ziehung“ die Auswertung einer linearen Relation für einen bekannten Klartext.

Es werden r Kugeln zufällig gezogen ($r \leq n$). Die Wahrscheinlichkeit, dabei genau ν weiße Kugeln zu ziehen, ist

$$q_r^{(s)}(\nu) = \frac{\binom{s}{r-\nu} \binom{w}{\nu}}{\binom{n}{r}}.$$

Die Funktion

$$q_r^{(s)}: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt die **hypergeometrische Verteilung** (zu den Parametern n , s und r). Dabei ist $q_r^{(s)}(\nu) = 0$ für $\nu < 0$ und für $\nu > r$. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr schwarze als weiße Kugeln gezogen werden, ist

$$p_r^{(s)} = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\frac{r-1}{2}} q_r^{(s)}(\nu), & \text{wenn } r \text{ ungerade,} \\ \sum_{\nu=0}^{\frac{r}{2}-1} q_r^{(s)}(\nu) + \frac{1}{2} q_r^{(s)}\left(\frac{r}{2}\right), & \text{wenn } r \text{ gerade,} \end{cases}$$

wenn im Falle des Gleichstands zufällig mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$ für schwarz oder weiß entschieden wird.

Im uninteressanten Fall $p = \frac{1}{2}$ sind offensichtlich alle $p_r^{(s)} = \frac{1}{2}$.

Hilfssatz 1 *Es gilt:*

- (i) $p_1^{(s)} = p$.
- (ii) $p_2^{(s)} = p_1^{(s)}$ (falls $w \geq 1$).
- (iii) $p_3^{(s)} = \frac{s(s-1)}{n(n-1)} \cdot \left[3 - 2 \cdot \frac{s-2}{n-2} \right]$ (falls $w \geq 2$).
- (iv) $p_4^{(s)} = p_3^{(s)}$ (falls $w \geq 2$).
- (v) $p_r^{(s)} = 1$ für $r > 2w$.

Beweis. (i) ist trivial.

(ii) Da bei jeweils einer weißen und schwarzen Kugel zufällig entschieden wird, ist der Zähler gleich

$$\binom{s}{2} + \frac{1}{2} \binom{s}{1} \binom{w}{1} = \frac{s(s-1)}{2} + \frac{s(n-s)}{2} = \frac{s(n-1)}{2},$$

der Nenner gleich $\frac{n(n-1)}{2}$, der Quotient

$$p_2^{(s)} = \frac{s(n-1)}{n(n-1)} = p.$$

(iii) Hier ist der Zähler

$$\begin{aligned} \binom{s}{3} + \binom{s}{2} \cdot (n-s) &= \frac{s(s-1)(s-2) + 3s(s-1)(n-s)}{6} \\ &= \frac{s(s-1)}{6} \cdot [s-2 + 3 \cdot (n-s)] \\ &= \frac{s(s-1)}{6} \cdot [3 \cdot (n-2) - 2 \cdot (s-2)]. \end{aligned}$$

Der Nenner ist $\frac{1}{6} \cdot n(n-1)(n-2)$, also hat $p_3^{(s)}$ den behaupteten Wert.

(iv) Die Rechnung wird weggelassen, da im nächsten Hilfssatz eine allgemeinere Aussage bewiesen wird.

(v) folgt, weil dann auf jeden Fall mehr schwarze Kugeln gezogen werden.

◇

Hilfssatz 2 Ist r gerade und $2 \leq r \leq 2w$, so

$$p_{r+1}^{(s)} > p_r^{(s)} = p_{r-1}^{(s)}.$$

Beweis. Sei $A_r^{(s)}(\nu) = \binom{n}{r} \cdot q_r^{(s)}(\nu)$ der Zähler von $q_r^{(s)}(\nu)$ und $B_r^{(s)} = \binom{n}{r} \cdot p_r^{(s)}$ der Zähler von $p_r^{(s)}$.

Beim Übergang von r nach $r+1$ wird die Mehrheitsentscheidung „schwarz“ nach $r+1$ Zügen in $B_{r+1}^{(s)}$ Fällen getroffen. Darunter sind:

- $\sum_{\nu=0}^{\frac{r}{2}-1} A_r^{(s)}(\nu)$ Fälle, in denen bereits nach r Zügen mindestens $\frac{r}{2} + 1$ schwarze Kugeln gezogen worden waren. Für die $(r+1)$ -te Kugel gibt es noch $n-r$ Möglichkeiten, die aber alle an der Entscheidung nichts ändern. Wir haben hier also

$$X_1 = (n-r) \cdot \sum_{\nu=0}^{\frac{r}{2}-1} A_r^{(s)}(\nu)$$

Fälle, in denen „schwarz“ entschieden wird.

- $A_r^{(s)}\left(\frac{r}{2}\right)$ Fälle, bei denen nach r Zügen genau $\frac{r}{2}$ schwarze Kugeln gezogen worden waren. Von den $n - r$ Möglichkeiten für die $(r + 1)$ -te Kugel sind
 - $s - \frac{r}{2}$ schwarz und führen zur Entscheidung „schwarz“,
 - $w - \frac{r}{2}$ weiß und führen zur Entscheidung „weiß“.

Es kommen also

$$X_2 = \left(s - \frac{r}{2}\right) \cdot A_r^{(s)}\left(\frac{r}{2}\right)$$

Fälle hinzu, in denen „schwarz“ entschieden wird.

- In den übrigen Fällen liegen nach r Zügen höchstens $\frac{r}{2} - 1$ schwarze Kugeln vor, und die $(r + 1)$ -te Kugel kann somit die Entscheidung für „weiß“ nicht ändern.

Da von den gezählten Fällen jeweils $r + 1$ dieselbe Menge von gezogenen Kugeln ergeben, ist

$$B_{r+1}^{(s)} = \frac{1}{r+1} \cdot (X_1 + X_2) = \frac{n-r}{r+1} \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{\frac{r}{2}-1} A_r^{(s)}(\nu) + \frac{s-\frac{r}{2}}{n-r} \cdot A_r^{(s)}\left(\frac{r}{2}\right) \right].$$

Für den Koeffizienten des letzten Terms gilt

$$\frac{s - \frac{r}{2}}{n - r} > \frac{1}{2} \iff 2s - r > n - r \iff s > \frac{n}{2}.$$

(Da $r \leq 2w$, ist $r < n$.) Also folgt

$$B_{r+1}^{(s)} > \frac{n-r}{r+1} \cdot B_r^{(s)}$$

und somit der erste Teil der Behauptung.

Etwas komplizierter ist der Übergang von $r - 1$ nach r . Die Entscheidung „schwarz“ wird nach r Zügen in $B_r^{(s)}$ Fällen getroffen. Darunter sind

- $\sum_{\nu=0}^{\frac{r}{2}-2} A_{r-1}^{(s)}$ Fälle, wo nach $r - 1$ Zügen mindestens $\frac{r}{2} + 1$ schwarze Kugeln gezogen worden waren. Die $n - r + 1$ Möglichkeiten für die r -te Kugel ändern die Entscheidung nicht. Es gibt hier also

$$Y_1 = (n - r + 1) \cdot \sum_{\nu=0}^{\frac{r}{2}-2} A_{r-1}^{(s)}$$

Fälle, in denen „schwarz“ entschieden wird.

- $A_{r-1}^{(s)}\left(\frac{r}{2} - 1\right)$ Fälle, wo nach $r - 1$ Zügen genau $\frac{r}{2}$ schwarze Kugeln gezogen worden waren. Die $n - r + 1$ Möglichkeiten für die r -te Kugel zerfallen in

- $s - \frac{r}{2}$ schwarze, die zu der Entscheidung „schwarz“ führen; hier gibt es also

$$Y_2 = \left(s - \frac{r}{2}\right) \cdot A_{r-1}^{(s)}\left(\frac{r}{2} - 1\right)$$

zusätzliche Fälle.

- $w + 1 - \frac{r}{2}$ weiße, wo die Entscheidung mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zufällig getroffen wird; es kommen also

$$Y_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(w + 1 - \frac{r}{2}\right) \cdot A_{r-1}^{(s)}\left(\frac{r}{2} - 1\right)$$

Fälle hinzu.

- $A_{r-1}^{(s)}\left(\frac{r}{2}\right)$ Fälle, wo nach $r - 1$ Zügen genau $\frac{r}{2} - 1$ schwarze Kugeln gezogen worden waren. Die $n - r + 1$ Möglichkeiten für die r -te Kugel zerfallen in

- $s + 1 - \frac{r}{2}$ schwarze, wo die Entscheidung zufällig mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ getroffen wird – es kommen also

$$Y_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(s + 1 - \frac{r}{2}\right) \cdot A_{r-1}^{(s)}\left(\frac{r}{2}\right)$$

Fälle hinzu –

- $w - \frac{r}{2}$ weiße, in denen die Entscheidung bei „weiß“ bleibt.

- In den übrigen Fällen, wo nach $r - 1$ Zügen höchstens $\frac{r}{2} - 2$ schwarze Kugeln gezogen worden waren, bleibt die Entscheidung ebenfalls bei „weiß“.

Da jeweils r der gezählten Fälle dieselbe Menge von gezogenen Kugeln ergeben, gilt

$$\begin{aligned} B_r^{(s)} &= \frac{1}{r} \cdot (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \\ &= \frac{n - r + 1}{r} \cdot \sum_{\nu=0}^{\frac{r}{2}-2} A_{r-1}^{(s)} + \frac{1}{r} \cdot \left(s - \frac{r}{2} + \frac{w}{2} + \frac{1}{2} - \frac{r}{4}\right) \cdot A_{r-1}^{(s)}\left(\frac{r}{2} - 1\right) \\ &\quad + \frac{1}{2r} \cdot \left(s - \frac{r}{2} + 1\right) \cdot A_{r-1}^{(s)}\left(\frac{r}{2}\right) \end{aligned}$$

Da $s + \frac{w}{2} = n - \frac{w}{2}$, ist der Koeffizient des mittleren Terms gleich

$$s - \frac{r}{2} + \frac{w}{2} - \frac{r}{4} + \frac{1}{2} = n - \frac{w}{2} - r + \frac{r}{4} + 1 - \frac{1}{2} = (n - r + 1) - \frac{1}{2} \cdot \left(w - \frac{r}{2} + 1\right).$$

Also ist

$$\begin{aligned} B_r^{(s)} &= \frac{n - r + 1}{r} \cdot \sum_{\nu=0}^{\frac{r}{2}-1} A_{r-1}^{(s)} \\ &\quad - \frac{1}{2r} \left(w - \frac{r}{2} + 1\right) \binom{s}{\frac{r}{2}} \binom{w}{\frac{r}{2} - 1} + \frac{1}{2r} \left(s - \frac{r}{2} + 1\right) \binom{s}{\frac{r}{2} - 1} \binom{w}{\frac{r}{2}}. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Terme heben sich weg, und es bleibt

$$B_r^{(s)} = \frac{n-r+1}{r} \cdot B_{r-1}^{(s)}.$$

Daraus folgt der zweite Teil der Behauptung. \diamond

Damit ist insbesondere gezeigt:

Satz 1 Die Wahrscheinlichkeit $p_r^{(s)}$ wächst mit r monoton von $p_1^{(s)} = p$ bis $p_{2w+1}^{(s)} = 1$.

Wenn die Quotienten

$$\frac{rs}{n}, \frac{rw}{n}, \frac{(n-r)s}{n}, \frac{(n-r)w}{n}$$

hinreichend groß sind (FISHERS Faustregel sagt: ≥ 5 reicht), kann man die hypergeometrische Verteilung durch die Normalverteilung approximieren; das bedeutet insbesondere

$$\sum_{\nu=0}^x q_r^{(s)}(\nu) \approx \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-t^2/2} dt,$$

wobei μ der Mittelwert und σ^2 die Varianz der hypergeometrischen Verteilung (zu den Parametern n , s und r) und Φ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist. Für Mittelwert und Varianz gilt

Hilfssatz 3

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{rw}{n}, \\ \sigma^2 &= \frac{r(n-r) \cdot w(n-w)}{n^2(n-1)}. \end{aligned}$$

Beweis. Bei einer zufälligen Stichprobenziehung von r Kugeln der Reihe nach sei $X_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, die 0 ist, wenn die k -te Kugel schwarz ist, und 1, wenn sie weiß ist. Dann ist $S = X_1 + \dots + X_r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, die die Anzahl der weißen Kugeln in der Stichprobenziehung angibt. Es ist $\mu = E(S)$ der Erwartungswert und $\sigma^2 = \text{Var}(S)$ die Varianz dieser Zufallsvariablen.

Klar ist $E(X_k) = \frac{w}{n}$ also $E(S) = r \cdot \frac{w}{n}$.

Für die Berechnung der Varianz bemerken wir zuerst, dass $X_k^2 = X_k$, also

$$\text{Var}(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = \frac{w}{n} - \frac{w^2}{n^2} = \frac{w(n-w)}{n^2}.$$

Da $X_j X_k(\omega) = 1 \iff X_j(\omega) = 1$ und $X_k(\omega) = 1$, ist die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{w(w-1)}{n(n-1)}$, der Erwartungswert also $E(X_j X_k) = \frac{w(w-1)}{n(n-1)}$. Daher ist die Kovarianz

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_j, X_k) &= E(X_j X_k) - E(X_j)E(X_k) = \frac{w(w-1)}{n(n-1)} - \frac{w^2}{n^2} \\ &= \frac{w(n(w-1) - w(n-1))}{n^2(n-1)} = \frac{w(w-n)}{n^2(n-1)}. \end{aligned}$$

Die Varianz von S ist also

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \sum_{k=1}^r \text{Var}(X_k) + 2 \cdot \sum_{1 \leq j < k \leq r} \text{Cov}(X_j, X_k) \\ &= \frac{rw(n-w)}{n^2} + r(r-1) \cdot \frac{w(w-n)}{n^2(n-1)} = \frac{rw(n-w)}{n^2} \cdot \left[1 - \frac{r-1}{n-1} \right] \\ &= \frac{rw(n-w)}{n^2(n-1)} \cdot [n-r], \end{aligned}$$

wie behauptet. \diamond

Satz 2 (Asymptotische Verteilung) Die Wahrscheinlichkeit, mehr schwarze Kugeln zu ziehen, ist

$$p_r^{(s)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\sqrt{r\lambda}} e^{-t^2/2} dt$$

mit $\lambda = (2p-1)^2$, wenn $p \approx \frac{1}{2}$, $r \ll n$ und r nicht zu klein.

[Nach FISHERS Faustregel reicht $10 \leq r \leq n-10$ für $p \approx \frac{1}{2}$.]

Beweis. Die obere Grenze des Integrals ist für $x = \frac{r}{2}$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{x - \mu}{\sigma} &= \frac{(\frac{r}{2} - \frac{rw}{n}) \cdot n \cdot \sqrt{n-1}}{\sqrt{r(n-r)w(n-w)}} = \frac{(rn - 2rw)\sqrt{n-1}}{2 \cdot \sqrt{r(n-r)w(n-w)}} \\ &= \frac{\sqrt{r}\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-r}} \cdot \frac{s-w}{2\sqrt{sw}} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-r}} \cdot \sqrt{r} \cdot \frac{2p-1}{2\sqrt{p(1-p)}} \\ &\approx 1 \cdot \sqrt{r} \cdot \frac{2p-1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{r\lambda}, \end{aligned}$$

wie behauptet. \diamond