

## 7.4 Probabilistische Schaltnetze

Nun zur Formalisierung probabilistischer Algorithmen. Das sieht im Ansatz etwa so aus: Gegeben sei eine Funktion

$$f: A \longrightarrow \mathbb{F}_2^s$$

auf einer Menge  $A$ . Ein probabilistischer Algorithmus über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega$  soll eine Funktion

$$C: A \times \Omega \longrightarrow \mathbb{F}_2^s$$

definieren; er dient zur (probabilistischen) Berechnung von  $f(x)$  bzw.  $f$ , wenn die Wahrscheinlichkeit

$$P(\{\omega \mid C(x, \omega) = f(x)\}) \quad (\text{„lokal“}) \text{ bzw.}$$

$$P(\{(x, \omega) \mid C(x, \omega) = f(x)\}) \quad (\text{„global“})$$

genügend groß ist (signifikant  $> \frac{1}{2^s}$ ). Im lokalen Fall wird bei festem  $x$  über  $\Omega$  gemittelt, im globalen Fall auch über  $A$ . Dabei sollen im allgemeinen die Wahrscheinlichkeitsräume  $\Omega$  und  $A \times \Omega$  endlich und mit der Gleichverteilung versehen sein.

Um probabilistische Algorithmen beschreiben zu können, muss man Schaltnetze mit *drei* verschiedenen Typen von Eingängen betrachten:  $r$  **deterministische Eingänge**, die mit einer Eingabe  $x \in \mathbb{F}_2^r$  belegt werden, einige konstante Eingänge – da der Innengrad unbeschränkt ist, reichen zwei, je einer für die Konstanten 0 und 1 – und  $k$  **probabilistische Eingänge**, die mit einem Element des LAPLACESchen Wahrscheinlichkeitsraums  $\Omega = \mathbb{F}_2^k$  belegt werden ( $k$  „Münzenwürfe“), oder mit Elementen eines Teilraums  $\Omega \subseteq \mathbb{F}_2^k$ . Über die Ausgabe  $y \in \mathbb{F}_2^s$  werden dann Wahrscheinlichkeitsausagen der oben beschriebenen Art gemacht.

### Beispiele

1. Die Suche nach einem Nicht-Quadratrest für einen Primzahlmodul  $p$ : Dabei sei  $p$  eine  $n$ -Bitzahl. Dazu wurde  $b \in [1 \dots p-1]$  zufällig gewählt und  $\left(\frac{b}{p}\right)$  (das LEGENDRE-Symbol, das für Quadratreste 1, für Nichtquadratreste -1 ist) berechnet. Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg ist dabei  $\frac{1}{2}$ , der Aufwand  $O(n^2)$  (siehe Anhang A.9). Betrachten wir allgemeiner die Frage, ob in einem unabhängig gewählten  $h$ -Tupel  $(b_1, \dots, b_h) \in \Omega = [1 \dots p-1]^h$  ein Nicht-Quadratrest vorkommt. Es gibt (für das fest gewählte  $p$ ) ein Schaltnetz ohne deterministische Eingänge (aber mit konstanten Eingängen zur Einspeisung von  $p$ ),

$$C: \mathbb{F}_2^{hn} \longrightarrow \mathbb{F}_2^n,$$

$$C(\omega) = \begin{cases} b_i, & \text{das erste } b_i, \text{ das Nicht-Quadratrest ist,} \\ 0, & \text{falls kein Nicht-Quadratrest gefunden wurde,} \end{cases}$$

das die Größe  $O(hn^2)$  hat und mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \frac{1}{2^h}$  erfolgreich ist.

2. Der strenge Pseudoprimzahltest: Hier entstammen die Eingaben der Menge  $A$  der ungeraden Zahlen in  $[3 \dots 2^n - 1]$ . Berechnet werden soll die Funktion

$$f : A \longrightarrow \mathbb{F}_2, \quad f(m) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m \text{ zusammengesetzt,} \\ 0, & \text{falls } m \text{ prim.} \end{cases}$$

Die zufälligen Eingänge werden durch die Wahl eines Basiselements  $a \in \Omega = [2 \dots 2^n - 1]$  besetzt. Der strenge Pseudoprimzahltest liefert ein Schaltnetz

$$C : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

der Größe  $O(n^3)$  mit dem Ergebnis 1, wenn  $m$  durchfällt (dann ist  $m$  sicher zusammengesetzt), oder 0, wenn  $m$  besteht (dann ist  $m$  möglicherweise prim).

Die Eigenschaft eines (probabilistischen) Schaltnetzes  $C$  mit  $r$  deterministischen Eingängen, eine Entscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit richtig zu treffen, die signifikant vom zufälligen Erraten des Wertes  $f(x) \in \mathbb{F}_2^s$  abweicht, wird so formalisiert: Ein Schaltnetz

$$C : \mathbb{F}_2^r \times \Omega \longrightarrow \mathbb{F}_2^s$$

hat einen  $\varepsilon$ -**Vorteil** mit  $\varepsilon \geq 0$  bei der Berechnung von  $f(x)$  bzw.  $f$ , wenn

$$P(\{\omega \in \Omega \mid C(x, \omega) = f(x)\}) \geq \frac{1}{2^s} + \varepsilon \quad (\text{„lokal“}) \text{ bzw.}$$

$$P(\{(x, \omega) \in A \times \Omega \mid C(x, \omega) = f(x)\}) \geq \frac{1}{2^s} + \varepsilon \quad (\text{„global“}).$$

Die Wahrscheinlichkeit bezüglich  $\omega$  für das richtige Ergebnis wird also im globalen Fall noch über  $x \in A$  gemittelt. Der Vorteil  $\varepsilon$ , also die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2^s}$ , entspricht dem reinen Raten des Ergebnisses.

$C$  hat eine **Irrtumswahrscheinlichkeit**  $\varepsilon$  bei der Berechnung von  $f(x)$  bzw.  $f$ , wenn

$$P(\{\omega \in \Omega \mid C(x, \omega) = f(x)\}) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{bzw.}$$

$$P(\{(x, \omega) \in A \times \Omega \mid C(x, \omega) = f(x)\}) \geq 1 - \varepsilon.$$

## Beispiele

1. Bei der Suche nach einem Nicht-Quadratrest mod  $p$  ist

$$P(\{\omega \in \Omega \mid C(\omega) = 1\}) = 1 - \frac{1}{2^h}.$$

Das Schaltnetz hat also einen  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^h})$ -Vorteil und eine Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{2^h}$ .

2. Beim strengen Pseudoprimzahltest ist für festes  $m$

$$P(\{\omega \in \Omega \mid C(m, \omega) = f(m)\}) \begin{cases} \geq \frac{3}{4}, & \text{wenn } m \text{ zusammengesetzt,} \\ = 1, & \text{wenn } m \text{ prim.} \end{cases}$$

Das ergibt über alle  $m$  gemittelt

$$P(\{(m, \omega) \in A \times \Omega \mid C(m, \omega) = f(m)\}) \geq \frac{3}{4},$$

also einen  $\frac{1}{4}$ -Vorteil und eine Irrtumswahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$ . (Da es wesentlich mehr zusammengesetzte Zahlen als Primzahlen gibt, wird bei der Mittelung über  $m$  der Wert  $\frac{1}{4}$  nicht wesentlich erhöht.)