Reprinted from JOURNAL OF ALGEBRA
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

Vol. 65, No. 2, August 1980
Printed in Belgium

Über die unipotenten Klassen reduktiver Gruppen II

KLAUS POMMERENING

Fachbereich Mathematik der Johannes-Gutenberg-Universität, Saarstraße 21, D-6500 Mainz, Federal Republic of Germany

Communicated by B. Huppert

Received July 12, 1979

Diese Arbeit ist die Fortsetzung von [9]. Es wird bewiesen, daß der Klassifikationssatz von Bala-Carter [1, 2] für die nilpotenten Elemente der Lie-Algebra einer halbeinfachen Gruppe in beliebiger guter Charakteristik gilt. Die Bezeichnungen und Konventionen von [9] bleiben in Kraft, aber reduktive Gruppen müssen nicht unbedingt zusammenhängend sein.

1. DAS VERFAHREN DER KLASSIFIKATION

In diesem Paragraphen wird das Verfahren der Klassifikation noch einmal skizziert. Das steht zwar in wesentlichen schon in [9]; es werden aber einige Vereinfachungen eingeführt und einige Korrekturen angebracht. Die Charakteristik p des Grundkörpers k sei stets gut für die betrachtete halbeinfache Gruppe G, wenn dies nicht ausdrücklich anders gesagt wird.

(1.1) In [9] wurden die 0-1-Moduln $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ in der halbeinfachen Gruppe G eingeführt. Allgemeiner will ich Graduierungen der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ betrachten, die durch die Gewichtsraum-Zerlegung nach EPUn gegeben sind. Oder etwas allgemeiner: durch ganzzahlige Gewichtungen des Dynkin-Diagramms. Solche Graduierungen sollen *Standard-Graduierungen* heißen.

BEISPIEL. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ hat die Basis $\{h, x, y\}$ mit der üblichen Multiplikationstafel $[hx] = 2x$, $[hy] = -2y$, $[xy] = h$. Seien $r, s \in \mathbf{Z}$ mit $r + s \neq 0$. Dann wird $\mathfrak{g}$ in Characteristik 2 durch

$$\mathfrak{g}_r = kx, \qquad \mathfrak{g}_s = ky, \qquad \mathfrak{g}_{r+s} = kh$$

graduiert. Diese Graduierung ist nicht Standard.

Außer wenn G vom adjungierten Typ ist, stammt nicht jede Standard-Graduierung von einer EPU. Multipliziert man jedoch alle Grade mit einer geeigneten ganzen Zahl q, so findet man auch dann eine EPU; diese heißt dann "zur Graduierung passend".

0021-8693/80/080373–26$02.00/0

Sei nun $\mathfrak{g}$ Standard-graduiert. Stets ist $\mathfrak{g}_i$ für $i \neq 0$ als G_0-Modul vollständig reduzibel; die irreduziblen Summanden sind sogar infinitesimal irreduzibel. Außerdem ist $\mathfrak{g}_i$ als G_0-Modul fasthomogen; es gibt sogar nur endlich viele Bahnen: Dazu dient das folgende Lemma, das ein Extrakt aus Richardsons Endlichkeitssatz [13, I.5.1, S. 182–183] ist und genauso bewiesen wird (keine Voraussetzung über die Charakteristik).

LEMMA. *Sei G eine affine algebraische Gruppe und V ein rationaler G-Modul, auf dem G separabel operiert. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G und W ein H-Untermodul von V. Ferner gelte für die Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ von G und H*

$$\mathfrak{g} \cdot x \cap W \subseteq \mathfrak{h} \cdot x \text{ für alle } x \in W.$$

Dann gilt:

(i) *Jede G-Bahn in V trifft W nur in einer endlichen Anzahl von H-Bahnen.*

(ii) *H operiert separabel auf W.*

SATZ. *Sei G eine halbeinfache Gruppe in guter Charakteristik p. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G sei Standard-graduiert. Dann gilt für $i \neq 0$:*

(i) *G_0 hat auf $\mathfrak{g}_i$ nur endlich viele Bahnen*; *insbesondere ist $\mathfrak{g}_i$ unter G_0 fasthomogen.*

(ii) *Falls G keinen fasteinfachen Normalteiler vom Typ A_l mit $p \mid (l+1)$ hat, operiert G_0 separabel auf $\mathfrak{g}_i$.*

Beweis. Sei $V = \mathfrak{g}$, $H = G_0$ und $W = \mathfrak{g}_i$ im Lemma. Enthalte zunächst G keinen Normalteiler vom Typ A_l mit $p \mid (l+1)$. Dann operiert G nach [13, I.5.6, S.185] separabel auf $\mathfrak{g}$, und die Anzahl der Bahnen von nilpotenten Elementen ist endlich. Nur solche können aber $\mathfrak{g}_i$ treffen. Also ist nur noch $[\mathfrak{g}x] \cap \mathfrak{g}_i \subseteq [\mathfrak{g}_0 x]$ für beliebiges $x \in \mathfrak{g}_i$ zu prüfen, und das folgt direkt aus der Graduierung.

Falls G Normalteiler vom Typ A_l mit $p \mid (l+1)$ enthält, kann man sich o.B.d.A. auf den Fall $G = \mathbf{SL}_{l+1}$ beschränken und dann den obigen Schluß auf $\mathbf{GL}_{l+1}$ anwenden. Q.E.D.

KOROLLAR (in beliebiger Charakteristik). *Sei G halbeinfach und $\mathfrak{g}$ Standard-graduiert. Dann gilt* $\dim G_0 \geqslant \dim \mathfrak{g}_i$ *für alle i.*

Beweis. Es handelt sich dabei um eine Aussage über das Wurzelsystem. Eine solche kann durch Rückgriff auf die zugehörige halbeinfache Gruppe in einer speziellen Charakteristik bewiesen werden. Q.E.D.

(1.2) Für den nächsten Satz brauche ich eine Vorbetrachtung. Sei G eine fasteinfache algebraische Gruppe in guter Charakteristik p und nicht vom

Typ A_l mit $p \mid 2(l+1)$. Insbesondere ist $p \neq 2$, und die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G hängt nur von der Isogenieklasse von G ab. Nun kann die Killing-Form von $\mathfrak{g}$ zwar ausgeartet sein; nach [13, III.4.1, S.236] gibt es aber trotzdem auf $\mathfrak{g}$ eine G-invariante nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform, kurz: ein "G-Skalarprodukt." Die *Voraussetzung* sei jetzt also: G ist halbeinfach, char $k = p \neq 2$ ist gut für G, und $\mathfrak{g}$ besitzt ein G-Skalarprodukt.

Sei T ein maximaler Torus von G, $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$ seine Lie-Algebra, $\Phi = \Phi(T, G)$ das zugehörige Wurelsystem und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

die entsprechende Wurzelraum-Zerlegung. Dann ist $\mathfrak{t}$ eine nicht-ausgearteter Unterraum mit

$$\mathfrak{t}^\perp = \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \,.$$

Weiter ist $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$, wenn $\beta \neq -\alpha$, und $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ der Dualraum zu $\mathfrak{g}_\alpha$ (d.h., $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ist nicht-ausgearteter Unterraum).

Sei nun weiter $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$ eine Standard-Graduierung und $\lambda\colon \mathbf{G}_m \to T$ eine dazu passende EPU. Da sich die $\mathfrak{g}_i$ aus Wurzelräumen zusammensetzen, folgt sofort, daß $\mathfrak{g}_0$ nicht-ausgearteter Unterraum von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_{-i}$ der Dualraum zu $\mathfrak{g}_i$ ist. Sei $\mathfrak{s}$ die Lie-Algebra von $S := \lambda(\mathbf{G}_m)$.

LEMMA *Seien $i, j \in \mathbf{Z}$. Dann gilt für $x \in \mathfrak{g}_j$:*

(i) $[x\mathfrak{g}_{-i-j}]^\perp \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_i \,.$

(ii) $\dim[x\mathfrak{g}_i] = \dim[x\mathfrak{g}_{-i-j}].$

(iii) $\mathfrak{g}_{0x} \perp \mathfrak{s} \Leftrightarrow \mathfrak{s} \subseteq [x\mathfrak{g}_{-j}].$

Beweis. (i) Es ist trivialerweise $\mathfrak{g}_x = [x\mathfrak{g}]^\perp$. Daraus folgt (i), wenn man die Graduierung berücksichtigt.

(ii) $\dim[x\mathfrak{g}_i] = \dim \mathfrak{g}_i - \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_i = \dim \mathfrak{g}_i - (\dim \mathfrak{g}_i - \dim[x\mathfrak{g}_{-i-j}])$ nach (i).

(iii) Folgt ebenfalls aus (i), weil $\mathfrak{g}_{0x}^\perp \cap \mathfrak{g}_0 = [x\mathfrak{g}_{-j}]$. Q.E.D.

Ein Tripel (h, x, y) von Elementen aus $\mathfrak{g}$ heißt $\mathfrak{sl}_2$-*Tripel*, wenn $\mathfrak{h}$ halbeinfach ist, x und y nilpotent sind und die Multiplikationstafel wie im Beispiel in (1.1) aussieht. Dann spannen h, x und y in $\mathfrak{g}$ eine zu $\mathfrak{sl}_2$ isomorphe Unteralgebra auf.

In der Situation des Lemmas operiert $\mathfrak{s}$ auf jedem $\mathfrak{g}_j$ durch Multiplikation mit Skalaren. Also gibt es ein $h \in \mathfrak{s}$ mit $[hx] = 2x$ für alle $x \in \mathfrak{g}_j$. Aus Teil (iii) des Lemmas kann ich also zu $x \in \mathfrak{g}_j$ unter der Voraussetzung $\mathfrak{g}_{0x} \perp \mathfrak{s}$ ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (h, x, y) mit $h \in \mathfrak{s}$ und $y \in \mathfrak{g}_{-j}$ gewinnen. Dabei habe ich den Satz von Morozov-Jacobson nicht verwendet.

(1.3) Den Beweis des folgenden Satzes, der ohne Beweis in [14] steht, verdanke ich Jantzen. Dadurch wird mein ursprüngliches Argument erbeblich verkürzt und ebenso der Beweis von Theorem 4.2 in [1]. Die Charakteristik des Grundkörpers ist hier beliebig.

SATZ. *Sei G halbeinfach. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G sei Standard-graduiert. Es sei* $\dim G_0 = \dim \mathfrak{g}_q$ *für ein* $q \geqslant 1$. *Dann ist* $\mathfrak{g}_i \neq 0$ *höchstens, wenn* $q \mid i$.

Beweis. Da es sich nur um eine Aussage über das Wurzelsystem handelt, darf ich o.B.d.A. annehmen, daß der Grundkörper die Charakteristik 0 hat.

Seien λ und $\mathfrak{s}$ wie in (1.2). Nach (1.1) hat G_0 in $\mathfrak{g}_q$ eine dichte Bahn $G_0 \cdot x$. Damit ist $[\mathfrak{g}_0 x] = \mathfrak{g}_q$ und $\mathfrak{g}_{0x} = 0$. Aus (1.2) erhalte ich ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (h, x, y) mit $h \in \mathfrak{s}$ und $y \in \mathfrak{g}_{-q}$. Auf $\mathfrak{g}_i$ operiert h als Multiplikation mit $2i/q$. Da diese Multiplikatoren für jede Darstellung von $\mathfrak{sl}_2$ ganzzahlig sind, muß $\mathfrak{g}_i = 0$ sein, außer wenn $q \mid 2i$.

Wir können also alle Grade durch $q/2$ teilen und befinden uns dann im Fall $q = 2$. Als nächstes wird gezeigt, daß dann $\mathfrak{g}_1 = 0$ sein muß. Sei dazu P die (auf naheliegende Weise) zur Graduierung gehörige parabolische Untergruppe von G, $\mathfrak{p}$ ihre Lie-Algebra und $\mathfrak{u}$ die Lie-Algebra ihres unipotenten Radikals. Sei $y \in \mathfrak{u}$ ein Richardson-Element (in [9] "P-reguläres Element" genannt), $y = \sum_{i \geqslant 1} y_i$ mit $y_i \in \mathfrak{g}_i$. Die Projektion von $[\mathfrak{p} y] = \mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ ist surjektiv. Andererseits ist das Bild enthalten in $[\mathfrak{g}_0, y_1 + y_2] + [\mathfrak{g}_1 y_1]$. Dabei ist

$$\dim[\mathfrak{g}_0, y_1 + y_2] \leqslant \dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_2 .$$

Falls $\mathfrak{g}_1 \neq 0$ wäre, wäre $\dim[\mathfrak{g}_1 y_1] < \dim \mathfrak{g}_1$, denn entweder ist $y_1 = 0$ oder y_1 liegt im Kern von $\mathfrak{g}_1 \to [\mathfrak{g}_1 y_1]$; Widerspruch.

Die Graduierung ist nun auf einer geeigneten Wurzelbasis Δ durch Gewichte 0, 2 und $\geqslant 3$ gegeben. Sei Δ' die Teilmenge der Wurzeln vom Gewicht 0 oder 2 und H die durch Δ' definierte halbeinfache Untergruppe. Dann ist $G_0 \subseteq T \cdot H$ und $\mathfrak{g}_2 \subseteq \operatorname{Lie} H$, insbesondere $\dim \mathfrak{g}_2 \leqslant \dim H_0$. Andererseits ist $\dim \mathfrak{g}_2 = \dim G_0 \geqslant \dim H_0$. Daraus folgt $G_0 = H_0$, also $T \subseteq H_0 \subseteq H$, also $H = G$ und somit $\Delta' = \Delta$. Also kommen auf Δ nur die Gewichte 0 und 2 vor.

Q.E.D.

(1.4) Als erster Schritt zur Klassifikation wurden in [9] angegeben: die bijektiven Beziehungen zwischen den Mengen

(i) der Konjugationsklassen von ausgezeichneten parabolischen Untergruppen von G,

(ii) der Konjugationsklassen von ausgezeichneten 0-q-EPUn von G (q eine geeignete feste natürliche Zahl),

(iii) der ausgezeichneten 0-1-Diagramme in G, und eine kanonische Abbildung von (i) in die Menge

(iv) der Klassen von ausgezeichneten nilpotenten Elementen von $\mathfrak{g}$.

Der wesentliche Schritt zur Klassifikation der nilpotenten Elemente besteht im Beweis, daß die letztere Abbildung bijektiv ist. In [9] wurde die Injektivität etwas voreilig behauptet; die Begründung dafür ist sogar falsch: Die Konjugationsklasse einer parabolischen Untergruppe P ist im allgemeinen durch die Klasse eines Richardson-Elements nicht eindeutig bestimmt, siehe dazu [4]. Die Injektivität folgt allerdings direkt aus dem folgenden Lemma.

LEMMA. *Sei $x \in \mathfrak{g}$ ausgezeichnet nilpotent. Dann gibt es bis auf Konjugation mit G_x höchstens eine ausgezeichnete parabolische Untergruppe, für die x Richardson-Element ist.*

Beweis. Sei x Richardson-Element für die beiden ausgezeichneten parabolischen Untergruppen P und P'. Nach [9, (1.3)] kann ich, indem ich P und P' konjugiere, erreichen, daß x im Unterraum $\mathfrak{g}_1$ bzw. $\mathfrak{g}_1'$ bezüglich einer zu P bzw. P' passenden Graduierung durch ein 0-1-Diagramm liegt. Die zugehörigen 0-q-EPUn λ und λ' operieren also transitiv auf der punktierten Geraden $k^\times x$. Daher sind λ und λ' konjugiert, denn die maximalen Tori des Normalisators $N(x)$ der Geraden kx sind eindimensional [9, (3.1) bzw. (3.3)]. Also ist P zu P' konjugiert, etwa $P' = gPg^{-1}$. Da x Richardson-Element für P' ist, ist $g^{-1} \cdot x$ Richardson-Element für P, also $g^{-1} \cdot x = h \cdot x$ mit $h \in P$. Damit ist $gh \in G_x$ und $P' = (gh)\, P(gh)^{-1}$. Q.E.D.

Zu zeigen ist also noch, daß G die folgende Eigenschaft (A) hat:

(A) *Jedes ausgezeichnete nilpotente Element in $\mathfrak{g}$ ist Richardson-Element einer ausgezeichneten parabolischen Untergruppe von G.*

Um dann die vollständige Klassifikation der nilpotenten Elemente herleiten zu können, brauche ich die folgende stärkere Eigenschaft:

(Â) *Jeder halbeinfache Teil einer Levi-Typ-Untergruppe von G hat die Eigenschaft* (A).

Dabei verstehe ich unter einer Levi-Typ-Untergruppe einen Levi-Faktor einer parabolischen Untergruppe von G.

(1.5) Sei G eine algebraische Gruppe, die auf einer Varietät X operiert. Ein Element $x \in X$ heißt *quasifrei*, wenn der Kern der Operation einen maximalen Torus des Stabilisators G_x enthält. Bei der adjungierten Operation sind die quasifreien nilpotenten Elemente also genau die ausgezeichneten. Was ich hier quasifrei nenne, heißt in [8] "infinitesimal quasifrei."

Als entscheidend für die Klassifikation stellen sich die beiden folgenden Eigenschaften einer halbeinfachen Gruppe in guter Charakteristik heraus:

(E) *Sei $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ ein 0-1-Modul in G. Sei $x \in \mathfrak{g}_1$ quasifrei für G_0. Dann ist G_{0x} endlich.*

(Insbesondere ist dann $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ ausgezeichnet, und x liegt in der dichten G_0-Bahn von $\mathfrak{g}_1$.)

($\hat{\mathrm{E}}$) *Jede radizielle halbeinfache Untergruppe von G hat die Eigenschaft* (E).

Dabei bedeutet "radiziell," daß die Untergruppe von einem maximalen Torus von G normalisiert wird.

Der Hauptsatz dieser Arbeit ist:

THEOREM. *Jede halbeinfache Gruppe in guter Charaketeristik hat die Eigenschaft* ($\hat{\mathrm{E}}$).

Der Beweis wird im Rest der Arbeit durchgeführt. Dabei ist jeweils nur die Eigenschaft (E) nachzuweisen, denn gute Charakteristik vererbt sich auf radizielle Untergruppen. Außerdem kann man sich offensichtlich auf fast-einfaches G beschränken. Die empirische Evidenz legt die folgende stärkere *Vermutung* zwingend nahe:

(C) Sei $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ ein 0-1-Modul in G. Für ein $x \in \mathfrak{g}_1$ sei G_{0x}^o im halbeinfachen Teil (G_0, G_0) enthalten. Dann ist G_{0x} reduktiv.

Die Eigenschaft (C) kann ich nur unter stärkeren Einschränkungen der Charakteristik nachweisen, siehe (2.9); dabei wird (E) nicht verwendet. Ich weiß nicht, ob man (C) aus (E) oder dem Klassifikatiossatz herleiten kann.

(1.6) Ich zeige nun, wie aus der Eigenschaft ($\hat{\mathrm{E}}$) die Eigenschaft (A), also die Klassifikation der ausgezeichneten nilpotenten Elemente folgt.

LEMMA. *Sei G halbeinfach in guter Charakteristik mit* ($\hat{\mathrm{E}}$). *Die zugehörige Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *sei Standard-graduiert. Es gebe ein* $x \in \mathfrak{g}_q$ *für ein* $q \neq 0$, *das quasifrei für* G_0 *ist. Dann ist die Graduierung durch ein ausgezeichnetes* 0-1-*Diagramm induziert und* G_{0x} *endlich.*

Beweis. Das Paar $(G_0, \mathfrak{g}_q)$ ist ein 0-1-Modul in einer radiziellen Untergruppe H von G, die folgendermaßen konstruiert wird: Zuerst wählt man das Untersystem der Wurzeln, deren Gewicht durch q teilbar ist, dann darin eine Basis Δ, die aus Wurzeln mit Gewicht $\geqslant 0$ besteht und schließlich darin die Teilmenge Δ' der Wurzeln mit Gewicht 0 oder q; H wird durch Δ' definiert. Da das Zentrum von H in G_0 enthalten ist und trivial auf $\mathfrak{g}_q$ operiert, muß H von maximalem Rang und insbesondere halbeinfach sein. Da H die Eigenschaft (E) hat, ist G_{0x} endlich und $\dim G_0 = \dim \mathfrak{g}_q$. Aus Satz (1.3) folgt $H = G$. Q.E.D.

SATZ. *Sei G eine halbeinfache Gruppe in guter Charakteristik mit der Eigenschaft* ($\hat{\mathrm{E}}$). *Dann hat G auch die Eigenschaft* (A).

KOROLLAR. *Die kanonische Beziehung zwischen den Konjugationsklassen von* *ausgezeichneten parabolischen Untergruppen und den ausgezeichneten nilpotenten Bahnen ist bijektiv.*

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}$ ausgezeichnet nilpotent. Sei dazu eine EPU gewählt, so daß x im Gewichtsraum g_q der zugehörigen Graduierung liegt, siehe [9, (3.3)]. Nach dem Lemma ist $(G_0, \mathfrak{g}_q)$ ein ausgezeichneter 0-1-Modul in G, und die zugehörige parabolische Untergruppe P ist ausgezeichnet. Nach [9, (1.3)] ist x Richardson-Element für P. Q.E.D.

(1.7) Die Klassifikation sämtlicher nilpotenter Elemente wird mit Hilfe des folgenden Satzes hergeleitet, der in *beliebiger* Charakteristik gilt:

SATZ. *Sei G halbeinfach.*

(i) *Sei $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Dann gibt es bis auf Konjugation mit $G_x{}^0$ genau eine minimale Levi-Typ-Untergruppe H von G mit $x \in \mathfrak{h} =$ Lie H, und x ist dann in $\mathfrak{h}$ ausgezeichnet nilpotent.*

(ii) *Seien H und H' Levi-Typ-Untergruppen, $x \in \mathfrak{h}$ und $x' \in \mathfrak{h}'$ jeweils ausgezeichnet nilpotent. Liege x in der G-Bahn von x'. Dann sind H und H' zueinander konjugiert.*

(iii) *Sei H eine Levi-Typ-Untergruppe, x und $x' \in \mathfrak{h}$ ausgezeichnet nilpotent und x in der G-Bahn von x'. Dann liegt x schon in der $N_G(H)$-Bahn von x'.*

Beweis. (i) Sei S ein maximaler Torus von G_x. Dann ist $H := Z_G(S)$ eine Levi-Typ-Untergruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(S)$. Also ist $x \in \mathfrak{h}$. Sei nun H' irgendeine Levi-Typ-Untergruppe mit $x \in \mathfrak{h}'$, und sei $S' = Z(H')^o$. Dann ist $S' \subseteq G_x{}^o$, also S' konjugiert zu einer Untergruppe von S und $H' = Z_G(S')$ konjugiert zu einer Obergruppe von H. Also ist H bis auf Konjugation mit $G_x{}^o$ die einzige solche minimale Levi-Typ-Untergruppe. Nach Definition von H ist x ausgezeichnet in $\mathfrak{h}$.

(ii) Sei $x = g \cdot x'$. Dann folgt aus (i), daß H und $gH'g^{-1}$ under $G_x{}^o$ konjugiert sind.

(iii) Ich beginne wie bei (ii) und schließe $H = (g'g)\, H(g'g)^{-1}$ mit $g' \in G_x{}^o$. Dann ist $x = g'g \cdot x'$ und $g'g \in N_G(H)$. Q.E.D.

Daraus folgt dann direkt, daß der Klassifikationssatz von Bala-Carter auch gilt, wenn man nur gute Charakteristik voraussetzt. Wenn man will, kann man auch zu jedem nilpotenten Element das übliche gewichtete Dynkin-Diagramm finden, siehe [2, S.8ff.]; das Ergebnis muß auch in beliebiger guter Charakteristik das richtige sein, da es durch eine Rechnung im Wurzelsystem gewonnen wird.

(1.8) Umgekehrt folgt auch die Eigenschaft (E) aus der Klassifikation der nilpotenten Elemente:

SATZ. *Sei G halbeinfach (in beliebiger Charakteristik).*

(i) *Ist $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ ein 0-1-Modul in G und $x \in \mathfrak{g}_1$, so enthält G_0 einen maximalen Torus von G_x.*

(ii) *Ist die Charakteristik gut und hat G die Eigenschaft* (A), *so auch* (E).

Beweis. (i) Sei $\lambda: \mathbf{G}_m \to G$ eine zu $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ passende EPU. Dann ist $\lambda(\mathbf{G}_m) \subseteq N(x)$; für die Bezeichnung siehe (1.4). Sei $S' \supseteq \lambda(\mathbf{G}_m)$ ein maximaler Torus von $N(x)$. Da G_x Normalteiler von $N(x)$ ist, ist $S := (S' \cap G_x)^o$ maximaler Torus von G_x und $S' = \lambda(\mathbf{G}_m) \cdot S$. Also ist $S \subseteq Z_G(\lambda(\mathbf{G}_m)) = G_0$.

(ii) Ist nun G_{0x}^0 unipotent, so muß S trivial sein. D.h., x ist in $\mathfrak{g}$ ausgezeichnet nilpotent. Da G die Eigenschaft (A) hat, ist x Richardson-Element einer ausgezeichneten parabolischen Untergruppe P von G. Dazu gibt es eine 0-r-EPU μ, in deren r-Eigenraum x liegt. Wie in (1.4) ist $q\mu$ unter $G_x{}^o$ zu $r\lambda$ konjugiert. Also ist P bis auf Konjugation die zu $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ gehörige parabolische Untergruppe und somit G_{0x} endlich. Q.E.D.

In den klassischen Gruppen, also denen vom Typ A_r, B_r, C_r und D_r ist die Klassifikation der nilpotenten Elemente auf elementare Weise durchführbar [13, Chap. IV; 4; 5]. Daraus läßt sich direkt die Eigenschaft (A) gewinnen und somit auch der Klassifikationssatz und die Eigenschaft (Ê):

SATZ. *Sei G eine klassische Gruppe in guter Charakteristik. Dann hat G die Eigenschaft (A).*

KOROLLAR. *G erfüllt* (Ê).

Beweis. Falls G vom Typ A_r ist, sind die ausgezeichneten nilpotenten Elemente genau die regulären, und diese sind die Richardson-Elemente der Borel-Untergruppen.

Sei nun G vom Typ B_r, C_r oder D_r und die Charakteristik $\neq 2$. Da die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ nur von der Isogenieklasse abhängt, darf ich $G = \mathbf{SO}_n$ oder $\mathbf{Sp}_n$ annehmen. Die nilpotenten Klassen werden (fast eindeutig) durch diejenigen Partitionen $(m_1, ..., m_s)$ von n beschreiben, für die gilt:

(a) Im Falle $G = \mathbf{SO}_n$ ist für jede gerade Zahl q die Anzahl der m_i mit $m_i = q$ gerade.

(b) Im Falle $G = \mathbf{Sp}_n$ dasselbe für ungerades q.

Aus den Angaben über den Zentralisator in [13, IV.2.25, S. 261] entnimmt man, daß die ausgezeichneten nilpotenten Klassen durch diejenigen Partitionen beschrieben werden, für die gilt:

(a′) Für $G = \mathbf{SO}_n$: Alle m_i sind ungerade und verschieden.

(b′) Für $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_n$: Alle m_i sind gerade und verschieden.

Zu jeder solchen Partition gehört nur eine nilpotente Klasse [13, IV.2.27, S. 262].

Sei nun eine ausgezeichnete parabolische Untergruppe in der Beschreibung von [1] gegeben. In [1, S. 410–414] wird daraus eine Partition vom Typ (a′) bzw. (b′) konstruiert. Da man auf diese Weise alle solchen Partitionen erhält, sind die endlichen Mengen (i) und (iv) in (1.4) gleichmächtig. Die injektive Abbildung zwischen ihnen ist also bijektiv. Q.E.D.

(1.9) Zum Abschluß dieses Paragraphen sei noch ohne Beweis vermerkt, daß sich die Methode von Vinberg zur Klassifikation der Bahnen in 0-1-Moduln (oder allgemeiner in den homogenen Bestandteilen $\mathbf{Z}_m$-graduierter Lie-Algebren) ebenfalls schon dann herleiten läßt, wenn man nur voraussetzt: Die Charakteristik ist gut für die Gruppe G, deren graduierte Lie-Algebra betrachtet wird, und außerdem ist die Eigenschaft ($\hat{\mathrm{E}}$) für G schon nachgewiesen. Der Beweis in [14] oder [3] läßt sich leicht übertragen. Das Ergebnis wird in Paragraph 3 angewendet.

2. Kriterien für quasifreie Elemente in graduierten Lie-Algreben

In diesem Paragraphen wird eine Reihe von Kriterien aufgestellt, die quasifreie Bahnen ausschließen, mit dem Ziel, das Theorem (1.5) zu beweisen. Diese Kriterien werden im nächsten Paragraphen dann auf die 0-1-Moduln in den Ausnahmegruppen angewendet.

(2.1) Die stärksten Kriterien zum Ausschluß quasifreier Bahnen in 0-1-Moduln beruhen auf der Existenz von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln. Sie werden zunächst hergeleitet. Ich greife dazu die Konstruktion von $\mathfrak{sl}_2$-Tripeln in (1.2) wieder auf:

Satz. *Sei G eine halbeinfache Gruppe in guter Charakteristik $p \neq 2$, $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ ein* 0-1-*Modul in ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\lambda\colon \mathbf{G}_m \to G$ eine dazu passende* 0-q-EPU. *Sei $h \in \mathfrak{s} :=$* Lie $\lambda(\mathbf{G}_m)$ *das Element, das auf $\mathfrak{g}_i$ durch Multiplikation mit $2i$ operiert. Dann gibt es zu jedem quasifreien $x \in \mathfrak{g}_1$ ein $y \in \mathfrak{g}_{-1}$, so daß (h, x, y) ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel ist.*

Beweis. Falls G keinen fasteinfachen Normalteiler vom Typ A_r mit $p \mid (r+1)$ enthält, folgt das direkt aus (1.2): Da $\mathfrak{g}_{0x}$ in der Lie-Algebra einer maximalen unipotenten Untergruppe von G_0 enthalten ist, ist sicher $\mathfrak{g}_{0x} \perp s$. Im allgemeinen Fall kann man sich auf den Fall $G = \mathbf{SL}_n$ mit $p \mid n$ beschränken, der trivial ist. Q.E.D.

Bemerkung. Daraus ergibt sich die folgende Version des Satzes von Morozov-Jacobson, die allgemeiner als die übliche ist: Sei G halbeinfach in guter Charakteristik $\neq 2$ und $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Dann läßt sich x zu einem $\mathfrak{sl}_2$-Tripel ergänzen. Das folgt aus (1.7)(i) und dem obigen Satz.

Nun habe ich zwar $\mathfrak{sl}_2$-Tripel konstruiert, aber die "klassische" Methode, diese anzuwenden, functioniert nur unter stärkeren Voraussetzungen über die Charakteristik. Dennoch läßt sich mit einer modifizierten Methode einiges retten. Ich starte mit der folgenden (wohlbekannten) Identität.

LEMMA. *Für die Elemente h, x, y einer Lie-Algebra gelte $[hx] = 2x$ und $[xy] = h$. Dann gilt für jede ganze Zahl $i \geqslant 1$:*

$$[(\operatorname{ad} x)^i, \operatorname{ad} y] = i(\operatorname{ad} x)^{i-1} \circ \operatorname{ad} h + i(i-1)(\operatorname{ad} x)^{i-1}.$$

Beweis. Durch Induktion mit Hilfe der einfacheren Identität $[\operatorname{ad} h, (\operatorname{ad} x)^i] = 2i(\operatorname{ad} x)^i$. Q.E.D.

(2.2) Sei wieder G halbeinfach, char $k = p \neq 2$ sei gut für G, und $\mathfrak{g}$ sei durch ein 0-1-Diagramm in G graduiert. Sei λ eine dazu passende 0-q-EPU und $S = \lambda(\mathbf{G}_m)$. Ich betrachte ein $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (h, x, y) mit $h \in \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{g}_0$, $x \in \mathfrak{g}_1$ und $y \in \mathfrak{g}_{-1}$. Es gilt $[x\mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i+1}$ und $[y\mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$ für alle i. Sei außerdem m der Maximalgrad der Graduierung, also $\mathfrak{g}_m \neq 0$, aber $\mathfrak{g}_i = 0$ für $i > m$. Anders gesagt: m ist das Gewicht der höchsten Wurzel.

LEMMA. *Sei $A := \operatorname{ad} y \circ \operatorname{ad} x$ und $\mathfrak{g}_{ij} := (\operatorname{ad} x)^j(\mathfrak{g}_{i-j})$ für $j \geqslant 0$, also $\mathfrak{g}_i$ wie folgt filtriert:*

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_{i0} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_{ij} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_{i,m+i} = (\operatorname{ad} x)^{m+i}(\mathfrak{g}_{-m}).$$

Dann operiert A auf $\mathfrak{g}_{ij}/\mathfrak{g}_{i,j+1}$ als $(j-2i)(j+1)$ id.

Beweis. Ein beliebiges Element von $\mathfrak{g}_{ij}$ hat die Form $w = (\operatorname{ad} x)^j(z)$ mit $z \in \mathfrak{g}_{i-j}$. Mit Lemma (2.1) folgt

$$\begin{aligned} Aw &= \operatorname{ad} y \circ (\operatorname{ad} x)^{j+1}(z) \\ &= (\operatorname{ad} x)^{j+1} \circ \operatorname{ad} y(z) - (j+1)(\operatorname{ad} x)^j \circ \operatorname{ad} h(z) - j(j+1)(\operatorname{ad} x)^j(z) \\ &= w' + 2(j-i)(j+1)(\operatorname{ad} x)^j(z) - j(j+1)(\operatorname{ad} x)^j(z) \\ &= w' + (j-2i)(j+1)w \end{aligned}$$

mit $w' = (\operatorname{ad} x)^{j+1} \circ \operatorname{ad} y(z) \in \mathfrak{g}_{i,j+1}$. Q.E.D.

Insbesondere operiert A auf $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_{-1}$ als Dreiecksmatrix mit folgender Eigenwert-Verteilung:

$\mathfrak{g}_0$: Für $j = 0,\ldots, m$ ist $j(j+1)$ Eigenwert der Vielfachheit $\dim \mathfrak{g}_{0j} - \dim \mathfrak{g}_{0,j+1}$.

$\mathfrak{g}_{-1}$: Für $j = 0,\ldots, m-1$ ist $(j+1)(j+2)$ Eigenwert der Vielfachheit $\dim \mathfrak{g}_{-1,j} - \dim \mathfrak{g}_{-1,j+1}$.

Wenn A auf $\mathfrak{g}_{-i}$ ($i \geqslant 0$) injektiv ist, ist erst recht $\operatorname{ad} x$ dort injektiv. Es interessiert also die Vielfachheit q_i des Eigenwerts 0 von A auf $\mathfrak{g}_{-i}$. Diese hängt von der Charakteristik p ab und ist für $p \neq 0$:

$$q_i = \sum_{p\mid(j-2i)(j+1)} (\dim \mathfrak{g}_{-i,j} - \dim \mathfrak{g}_{-i,j+1}).$$

Die beiden Zahlen

$$q_0 = \dim \mathfrak{g}_0/[x\mathfrak{g}_{-1}] + \sum_{j=1}^{\infty} \dim \mathfrak{g}_{0,jp-1}/\mathfrak{g}_{0,jp+1}\,,$$

$$q_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \dim \mathfrak{g}_{\ 1,jp-2}/\mathfrak{g}_{-1,jp}$$

sind nicht unabhängig voneinander. Es ist nämlich $\mathfrak{g}_{0j} = \operatorname{ad} x(\mathfrak{g}_{-1,j-1})$, also

$$\dim \mathfrak{g}_{0j} = \dim \mathfrak{g}_{-1,j-1} - \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1,j-1}\,.$$

Durch Aufaddieren folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \dim \mathfrak{g}_{0,jp-1}/\mathfrak{g}_{0,jp+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \dim \mathfrak{g}_{-1,jp-2}/\mathfrak{g}_{-1,jp} - \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1}\,,$$

also

$$q_0 = \dim \mathfrak{g}_0/[x\mathfrak{g}_{-1}] + q_1 - \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1} = \dim \mathfrak{g}_0 - \dim \mathfrak{g}_{-1} + q_1\,.$$

Wir merken uns noch, daß die Vielfachheit des Eigenwerts 0 von A auf $[x\mathfrak{g}_{-1}] = \mathfrak{g}_{01}$ gerade $q_1 - \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1}$ ist.

(2.3) Satz. *Sei G halbeinfach in guter Charakteristik $p \neq 2$, und $\mathfrak{g}$ besitze ein G-Skalarprodukt. Sei $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ ein 0-1-Modul in G und $\mathfrak{s}$ die Lie-Algebra einer dazu passenden* EPU. *Sei m der maximale Grad der zugehörigen Graduierung und $d_i = \dim \mathfrak{g}_i$. Dann gilt für $x \in \mathfrak{g}_1$:*

(i) *Ist $p = 0$ oder $\geqslant m + 2$ und $\mathfrak{g}_{0x} \perp \mathfrak{s}$, so ist $G_0 \cdot x$ die dichte Bahn in $\mathfrak{g}_1$.*

(ii) *Ist x quasifrei, so ist $d_0 = d_1$ für $p = 0$ und $d_{p-1} \geqslant d_0 - d_1$ für $p \neq 0$.*

Beweis. In beiden Fällen ist x zu einem $\mathfrak{sl}_2$-Tripel (h, x, y) ergänzbar, und $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad} x) = \mathfrak{g}_x \subseteq \operatorname{Ker} A$ mit $A = \operatorname{ad} y \circ \operatorname{ad} x$.

(i) In (2.2) ist $q_1 = 0$, also A auf $\mathfrak{g}_{-1}$ injektiv. Daher ist $\mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1} = 0$. Aus (1.2)(ii) folgt

$$d_1 = \dim \mathfrak{g}_{-1} = \dim[x\mathfrak{g}_{-1}] = \dim[x\mathfrak{g}_0],$$

also $[\mathfrak{g}_0 x] = \mathfrak{g}_1$ und $\dim \mathfrak{g}_{0x} = d_0 - d_1$. Daher ist $G_0 \cdot x$ die dichte Bahn.

(ii) Nach dem folgenden Lemma kann die Dimension von $\mathfrak{g}_{0x}$ höchstens gleich der Vielfachheit des Eigenwerts 0 von A auf $[x\mathfrak{g}_{-1}]$ sein. Aus der Schlußbemerkung von (2.2) folgt

(a) für $p = 0$: $\dim \mathfrak{g}_{0x} = 0$, also $d_0 = d_1$;

(b) für $p \neq 0$: $d_0 - d_1 \leqslant \dim \mathfrak{g}_{0x} \leqslant \dim \mathfrak{g}_{0x} + \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1} \leqslant q_1 \leqslant \dim \mathfrak{g}_{-1,p-2} \leqslant \dim \mathfrak{g}_{-p+1} = d_{p-1}$. Q.E.D.

LEMMA. *Ist G_{0x}^0 unipotent, so gilt:*

(i) $\mathfrak{g}_{0x} \subseteq [x\mathfrak{g}_{-1}]$.

(ii) $\dim \mathfrak{g}_{0x} + \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1} \leqslant q_1$.

(iii) $\dim \mathfrak{g}_{0x} = \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1} + (d_0 - d_1)$.

Beweis. (i) G_{0x} ist in einer maximalen unipotenten Unterpruppe von G_0 enthalten, $\mathfrak{g}_{0x}$ also in deren Lie-Algebra $\mathfrak{u}_0$. Da diese zu sich selbst orthogonal ist, folgt mit (1.2)(i)

$$\mathfrak{g}_{0x} \subseteq \mathfrak{u}_0 \subseteq \mathfrak{u}_0^\perp \cap \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_{0x}^\perp \cap \mathfrak{g}_0 = [x\mathfrak{g}_{-1}].$$

(ii) Schlußbemerkung in (2.2).

(iii) Nach (1.2)(ii) ist

$$d_1 - \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1} = d_0 - \dim \mathfrak{g}_{0x}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

(2.4) LEMMA. *Unter der Voraussetzung von* (2.3) *sei* $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ *ein* 0-1-*Modul in G. Es gebe ein* $\mathfrak{sl}_2$-*Tripel* (h, x, y) *mit* $h \in \mathfrak{g}_0$, $x \in \mathfrak{g}_1$ *und* $y \in \mathfrak{g}_{-1}$. *Dann gilt:*

(i) *Ist* $p = 5$ *und* $m \leqslant 8$, *so ist* $q_1 = d_4 - d_6$.

(ii) *Ist* $p = 7$ *und* $m \leqslant 14$, *so ist* $q_1 = d_6 - d_8 + d_{13}$.

(iii) *Ist* $p = 11$ *und* $m \leqslant 14$, *so ist* $q_1 = d_{10} - d_{12}$.

Beweis. Das läßt sich aus der Eigenwert-Verteilung von A in (2.2) ablesen. Als Beispiel wird (i) durchgeführt: Dann ist $q_1 = \dim \mathfrak{g}_{-1,3}/\mathfrak{g}_{-1,5}$. Auf $\mathfrak{g}_{-6,0}$ und $\mathfrak{g}_{-5,1}$ ist A injektiv. Daher ist $\dim \mathfrak{g}_{-4,2} = d_6$. Ebenso ist A auf $\mathfrak{g}_{-4,0}/\mathfrak{g}_{-4,2}$, auf $\mathfrak{g}_{-3,1}/\mathfrak{g}_{-3,3}$ und auf $\mathfrak{g}_{-2,2}/\mathfrak{g}_{-2,4}$ injektiv. Daher ist

$$q_1 = \dim \mathfrak{g}_{-1,3}/\mathfrak{g}_{-1,5} = \dim \mathfrak{g}_{-4,0}/\mathfrak{g}_{-4,2} = d_4 - d_6. \qquad \text{Q.E.D.}$$

KOROLLAR. *Ist* $p = 7$, $m \leqslant 12$ *und* $d_6 - d_8 < d_0 - d_1$, *so gibt es kein quasifreies* $x \in \mathfrak{g}_1$.

Beweis. Aus dem Lemma hier und dem Lemma in (2.3) folgt für unipotentes G_{0x}^0:

$$d_0 - d_1 \leqslant \dim \mathfrak{g}_{0x} \leqslant q_1 = d_6 - d_8, \text{ Widerspruch.} \qquad \text{Q.E.D.}$$

(2.5) Zusätzlich zu den elementaren Kriterien, die in [9] gesammelt worden sind, gebe ich noch zwei weitere Kriterien an. Diese erfordern einige Vorbereitungen. Ich beginne mit einem Satz und dazugehörigen Lemma, die (in Charakteristik 0 für zusammenhängende Gruppen) von Pysasetskii [10] stammen und im allgemeinen Fall genauso bewiesen werden.

LEMMA. *Sei G eine affine algebraische Gruppe und V ein G-Modul mit* $\dim V = n$. *Dann ist die Menge*

$$M = M(G, V) := \{(x, u) \in V \times V^* \mid \mathfrak{g} \cdot x \subseteq \operatorname{Ker} u\}$$

abgeschlossen und G-stabil in $V \times V^*$ *mit* $n \leqslant \dim M \leqslant 2n$. *Außerdem sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *G operiert separabel auf V und hat dort nur endlich viele Bahnen.*

(ii) $\dim M = n$.

SATZ. *Sei G eine affine algebraische Gruppe und V ein G-Modul, und zwar operiere G auf V separabel mit nur endlich vielen Bahnen. Dann operiert G auf V* ebenfalls separabel mit derselben Anzahl von Bahnen.*

Der nächste Satz stammt im wesentlichen von Kac und Vergne [8, 2.11]. Für eine algebraische Gruppe G, eine G-Varietät X und einen Torus $S \subseteq G$ sei $d(S, X)$ die Anzahl der Bahnen, für die S zu einem maximalen Torus des Stabilisators konjugiert ist.

SATZ. *Unter denselben Voraussetzungen gilt* $d(S, V) = d(S, V^*)$ *für jeden Torus* $S \subseteq G$.

KOROLLAR. *Sei G eine affine algebraische Gruppe und V und W zwei G-Moduln. G operiere auf* $V \oplus W$ *separabel mit endlich vielen Bahnen. Dann ist die Anzahl der quasifreien Bahnen in den G-Moduln* $V \oplus W$ *und* $V \oplus W^*$ *dieselbe.*

Die Anwendung dieses Ergebnisses auf 0-1-Moduln soll zunächst an einem Beispiel demonstriert werden.

BEISPIEL.

$$\begin{array}{c} 0\!-\!1\!-\!0\!-\!0\!-\!1 \\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; 1 \end{array} \quad \text{in } E_6 .$$

Die Zahl der quasifreien Bahnen ändert sich nicht, wenn man G_0 durch eine endliche Überlagerung ersetzt, etwa durch $\mathbf{G}_m{}^3 \times \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{SL}_3$ in diesem Beispiel. Auch die obigen Aussagen bleiben erhalten, obwohl die Separabilität möglicherweise verloren geht. Es ist $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{M}_{2,3} \oplus \mathbf{M}_{3,1} \oplus \mathbf{M}_{1,3}$ und die Operation wird beschrieben durch

$$(d, e, f, A, B) \cdot (X, Y, Z) = (dAXB^{-1}, eBY, fZB^{-1}),$$

vergleiche [9, (2.5)]. Setzt man $V = \mathbf{M}_{2,3} \oplus \mathbf{M}_{3,1}$ und $W = \mathbf{M}_{1,3}$, so ist $V \oplus W^* = \mathbf{M}_{2,3} \oplus \mathbf{M}_{3,1} \oplus \mathbf{M}_{3,1}$ mit der Operation

$$(d, e, f, A, B) \cdot (X, Y, Z) = (dAXB^{-1}, eBY, BZ/f).$$

Es handelt sich also hier um den 0-1-Modul

$$\begin{array}{c@{}c@{}c@{}c@{}c@{}c@{}c@{}c@{}c}
0 & - & 1 & - & 0 & - & 0 & - & 1 \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array} \quad \text{in } D_6 .$$

Da dieser nicht ausgezeichnet und (E) für D_6 in (1.8) bewiesen ist, kommen quasifreie Bahnen bei beiden Aktionen nicht vor.

Allgemein funktioniert dieser Schluß, wenn es ein Teildiagram der Form

$$0 - \underset{\Gamma_1}{\cdots} - 0 - 1 - \overset{\alpha_1}{0} - \underset{\Gamma_2}{\cdots} - \overset{\alpha_n}{0}$$

gibt, so daß alle Verbindungslinien zum übrigen Teil des Diagramms von Γ_2 ausgehen und zu Einsen führen. Dann wird das Diagramm ersetzt durch

$$\overset{\alpha_1}{0} - \cdots - \overset{\alpha_n}{0} - 1 - 0 - \underset{\Gamma_1}{\cdots} - 0,$$

wobei der Rest des Diagramms erhalten bleibt. Falls dabei Diagramme vom Typ A_r mit $p \mid (r+1)$ auftreten, hilft man sich wie üblich durch Rückzug auf $\mathbf{GL}_{r+1}$.

(2.6) Das letzte Kriterium schließlich hängt zusammen mit den "Spiegelungs-Funktoren," vergleiche [8, 2.3], ist von [15, Lemma 1] inspiriert und verallgemeinert [9, (2.5)].

Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{SL}_n$. Dann operiert $G := \mathbf{GL}_m \times H$ auf $\mathbf{M}_{m,n}$ in natürlicher Weise. Welche quasifreien Bahnen können dabei vorkommen? Im Falle $m > n$ gibt es keine [9, (2.5)]. Sei also o.B.d.A. $m \leqslant n$. Dann ist für $0 \leqslant l \leqslant m$

$$Z_l := \{X \in \mathbf{M}_{m,n} \mid \operatorname{Rang} X = l\}$$

eine lokal abgeschlossene, G-stabile Menge. Die Überlegung in [9, (2.5)] zeigt, daß es in Z_l mit $l < m$ keine quasifreien Elemente gibt. Daher ist nur noch Z_m

zu untersuchen. Wie in [15] betrachtet man dazu die Aktion von $G' := H \times \mathbf{GL}_{n-m}$ auf $\mathbf{M}_{n,n-m}$ und von H auf der Grassmann-Varietät $\mathrm{Gr}_{n-m}(W)$ und beweist:

SATZ. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *G hat in $\mathbf{M}_{m,n}$ eine quasifreie Bahn.*

(ii) *H hat in Gr_{n-m} eine quasifreie Bahn.*

(iii) *G' hat in $\mathbf{M}_{n,n-m}$ eine quasifreie Bahn.*

Ist eine der Bahnen gegeben, so können die beiden anderen so gefunden werden, daß alle drei Stabilisatoren isogen zueinander sind.

BEISPIELE. (1) 0–1 $\Rightarrow$ 0–1 in F_4. Dieser 0-1-Modul wird beschrieben durch die natürliche Operation von $\mathbf{GL}_2 \times \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{G}_m$ auf $\mathrm{Hom}(S^2(k^2), k^2) \oplus k^2 = \mathbf{M}_{2,3} \oplus \mathbf{M}_{2,1}$, wobei der Faktor $\mathbf{G}_m$ auf dem Summanden $\mathbf{M}_{2,1}$ operiert. Sei H die Projektion auf $\mathbf{SL}_2$ des Stabilisators eines festen $Y \in \mathbf{M}_{2,1}$ und $G = \mathbf{GL}_2 \times H$. Dann wird $G' = H \times \mathbf{GL}_1$ und operiert auf $\mathbf{M}_{3,1}$. Das bedeutet, daß das Diagramm 1 $\Rightarrow$ 0–1 in C_3 zu untersuchen ist. Es gibt also keine quasifreien Elemente außer in der dichten Bahn, wo der Stabilisator endlich ist.

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{c} 1\text{–}0\text{–}0\text{–}0\text{–}1\text{–}0\text{–}1 \\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; 0 \end{array} \quad \text{in } E_8 .$$

Indem ich G_0 durch eine isogene Gruppe ersetze, kann ich diesen 0-1-Modul durch die Operation von $\mathbf{G}_m{}^2 \times \mathbf{GL}_4 \times \mathbf{SL}_2{}^2$ auf $\mathbf{M}_{1,4} \oplus \mathbf{M}_{4,2} \oplus \mathbf{M}_{4,2} \oplus \mathbf{M}_{2,1}$ beschreiben, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned}&(d, e, A, B, C) \cdot (W, X, Y, Z) \\ &\quad = (dXA^{-1}, A(c_{11}X + c_{12}Y)B^{-1}, A(c_{21}X + c_{22}Y)B^{-1}, eBZ),\end{aligned}$$

wobei $C = (c_{ij})$. Mit Hilfe des Korollars in (2.5) ersetze ich $\mathbf{M}_{1,4}$ durch $\mathbf{M}_{4,1}$. Unser 0-1-Modul hat also genau dann eine quasifreie Bahn, wenn $\mathbf{G}_m{}^2 \times \mathbf{GL}_4 \times \mathbf{SL}_2{}^2$ eine in $\mathbf{M}_{4,1} \oplus \mathbf{M}_{4,2} \oplus \mathbf{M}_{4,2} \oplus \mathbf{M}_{2,1}$ hat. Sei H der Stabilisator eines festen $Z \in \mathbf{M}_{2,1}$ in $\mathbf{G}_m{}^2 \times \mathbf{SL}_2{}^2$. Bei geeigneter Interpretation der Operation von H bzw. $\mathbf{G}_m{}^2 \times \mathbf{SL}_2{}^2$ kann ich $\mathbf{M}_{4,1} \oplus \mathbf{M}_{4,2} \oplus \mathbf{M}_{4,2}$ durch $\mathbf{M}_{4,5}$ ersetzen. Der obige Satz reduziert dann die Suche nach quasifreien Behnen auf die Operation von $G' = H \times \mathbf{GL}_1 = H \times \mathbf{G}_m$ auf $\mathbf{M}_{5,1} = \mathbf{M}_{1,1} \oplus \mathbf{M}_{2,1} \oplus \mathbf{M}_{2,1}$. Damit bin ich beim 0-1-Modul 1 0–1–0–1 gelandet. Da dieser keine quasifreien Bahnen hat, hat auch der ursprüngliche keine.

Allgemein ist der Satz anwendbar auf 0–1-Diagramme Δ, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) Δ_0 besitzt eine Zusammenhangskomponente Γ vom Type A_{r-1}.

(ii) Alle Verbindungslinien von Γ zu Knoten in Δ_1 gehen von einem der Endpunkte von Γ aus.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so sei V die Summe der irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{g}_1$, auf denen der Γ entsprechende Normalteiler von G_0 nichttrivial operiert. V hat dann die Dimension rs mit $s \geqslant 1$. Ich sage zu dieser Situation: Δ hat ein *Teildiagramm vom Typ* (A, r, s). Das im Beispiel geschilderte Verfahren liefert dann im Falle $r > s$, daß es keine quasifreien Bahnen gibt. Falls $r \leqslant s < 2r$, erhalten wir eine Reduktion auf ein Diagramm von kleinerem Rang; das sieht im einzelnen so aus:

(a) Falls $s = r$, darf man Γ samt allen angrenzenden Einsen aus dem Diagramm weglassen.

(b) Falls $s = r + 1$, darf man Γ weglassen, siehe die obigen Beispiele

(c) Falls $s = r + l$ mit $2 \leqslant l < r$, darf man Γ um $r - l$ Nullen verkürzen; dabei wird das Korollar in (2.5) zweimal verwendet.

BEISPIELE.

$$(1)\quad \begin{array}{c} 0\text{–}0\text{–}1\text{–}0\text{–}0\text{–}0 \\ \phantom{0\text{–}0\text{–}}|\phantom{\text{–}0\text{–}0\text{–}0} \\ \phantom{0\text{–}0\text{–}}1\phantom{\text{–}0\text{–}0\text{–}0} \end{array} \quad \text{mit } r = s = 4 \text{ führt auf das „ausgeartete" Diagramm } 0\text{–}0$$

$$(2)\quad \begin{array}{c} 1\text{–}0\text{–}0\text{–}0\text{–}1\text{–}0\text{–}0 \\ \phantom{1\text{–}0\text{–}0\text{–}0\text{–}}|\phantom{\text{–}0\text{–}0} \\ \phantom{1\text{–}0\text{–}0\text{–}0\text{–}}0\phantom{\text{–}0\text{–}0} \end{array} \quad \text{mit } r = 4,\ s = 7 \text{ führt auf} \quad \begin{array}{c} 1\text{–}0\text{–}0\text{–}1\text{–}0\text{–}0 \\ \phantom{1\text{–}0\text{–}0\text{–}}|\phantom{\text{–}0\text{–}0} \\ \phantom{1\text{–}0\text{–}0\text{–}}0\phantom{\text{–}0\text{–}0} \end{array}$$

(2.7) Ich fasse nun die bisher gefundenen Kriterien zusammen. Ich sage: Ein 0–1-Diagramm *scheidet aus*, wenn es im zugehörigen 0–1-Modul keinen Stabilisator gibt, dessen Zusammenhangskomponente unipotent von positiver Dimension ist. Das Ziel ist also zu zeigen, daß sämtliche 0–1-Diagramme ausscheiden.

THEOREM. *Sei G fasteinfach und die Chrakteristik p des Grundkörpers sei gut für G. Sei ein 0–1-Diagramm in G gegeben und m der Maximalgrad in der zugehörigen Graduierung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G. Weiter sei $d_i = \dim \mathfrak{g}_i$. Dann scheidet das 0–1-Diagramm aus, wenn wenigstens eines der folgenden Kriterien erfüllt ist:*

(I) *Im Diagramm stoßen zwei Einsen aneinander, und nach Entfernung der Verbindungslinie zwischen ihnen scheidet wenigstens eines der beiden neu entstandenen Diagramme aus.*

(II) *G ist nicht vom Typ* A_r *mit* $p \mid (r+1)$, *und es gilt eine der Bedingungen*

(a) $p = 0$.

(b) $p \geqslant 3$ *und* $m \leqslant p-2$.

(c) $p \geqslant 3$ *und* $d_{p-1} < d_0 - d_1$.

(d) $p = 7$, $m \leqslant 8$ *und* $d_6 - d_8 < d_0 - d_1$.

(III) *Es gibt ein Teildiagramm vom Typ* (A, r, s), *und*

(a) $r > s$, *oder*

(b) $r \leqslant s < 2r$, *und nach der in* (2.6)(a) *bzw.* (*b*) *bzw.* (c) *beschriebenen Abänderung scheidet das neu entstandene Diagramm aus.*

(IV) *Es gibt ein Teildiagramm der in* (2.5) *beschriebenen Form, und nach der dort beschriebenen Abänderung scheidet das neu entstandene Diagramm aus.*

(2.8) Zum Abschluß dieses Paragraphen wird noch die Eigenschaft (C) aus (1.5) diskutiert. Es ergibt sich dabei ein Beweis des Klassifikationssatzes, der eine leichte Modifikation des "klassischen" nach Dynkin, Kostant, Bala, Carter und Vinberg ist: Erstens ist die Charakteristik-Voraussetzung etwas abgeschwächt, zweitens ist der Beweis insofern etwas vereinfacht, als die diffizile Untersuchung der Darstellubgen von $\mathfrak{sl}_2$ im Primzahl-Charakteristik durch die Untersuchung der Abbildung A in (2.2) ersetzt ist. Dieser zweite Punkt ist in Charakteristik 0 allerdings völlig unwesentlich, da der Schluß hier noch viel einfacher ist.

Zuerst ein Lemma (wohlbekannt, aber nirgends explizit zu finden). Der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

LEMMA. *Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe,* $X(G)$ *ihre Charaktergruppe,* $R = R(G)$ *ihr Radikal und H die charakteristische Untergruppe* $H = (G, G) \cdot R_u(G)$. *Dann gilt:*

(i) *Der Einschränkungs-Homomorphismus* $X(G) \to X(R)$ *ist ein Isomorphismus.*

(ii) G/H *ist ein Torus.*

(iii) $X(H)$ *is trivial.*

SATZ. *Seien G und H wie im Lemma und V ein fasthomogener G-Modul. Die maximale Dimension der H-Bahnen sei* $\dim V - r$ (*also* $0 \leqslant r \leqslant \dim G/H$). *Dann gibt es algebraisch unabhängige homogene relative G-Invarianten* $p_1, \ldots, p_r \in k[V]$ *mit* $k[V]^H = k[p_1, \ldots, p_r]$; *dabei sind die Nullstellenmengen* $Y_i = V(p_i)$ *gerade die* 1-*codimensionalen Komponenten des Komplements der dichten G-Bahn.*

Beweis. Sei $G \cdot x$ die dichte Bahn. Die 1-codimensionalen irreduziblen Komponenten $Y_1, \ldots, Y_s$ der algebraischen Menge $V - G \cdot x$ werden durch

Primpolynome $p_1, \ldots, p_s$ definiert. Da G zusammenhängend ist, sind die p_i relativ G-invariant. Nach [12, S.59/60] sind die p_i algebraisch unabhängig und homogen, und jede relative G-Invariante ist ein Monom in den p_i. Da alle Charaktere von G auf H verschwinden, sind die p_i sogar H-invariant. Der Torus G/H operiert diagonalisierbar auf dem Invariantenring $k[V]^H$ Daher hat $k[V]^H$ eine Basis aus relativen G-Invarianten, also aus Monomen in den p_i. D.h., $k[V]^H = k[p_1, \ldots, p_s]$.

Die maximale Dimension von H-Bahnen ist $\dim V - \operatorname{trdeg} k(V)^H$ [11, S. 407]. Also ist $r = \operatorname{trdeg} k(V)^H$. Da H charakterfrei und $k[V]$ faktoriell ist, ist $k(V)^H$ der Quotientenkörper von $k[V]^H$. Also ist $s = r$. Q.E.D.

Bemerkung. Liegt x in der dichten G-Bahn von V, so ist

$$r = \dim G/H - \dim G_x/H_x .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nämlich gleich der Codimension der Bahn $H \cdot x$ in $G \cdot x$.

KOROLLAR 1. *Die Anzahl der* 1*-codimensionalen G-Bahnen in V ist höchstens gleich r. Sie ist gleich r, wenn G insgesamt nur endlich viele Bahnen hat.*

Beweis. Der Abschluß jeder 1-codimensionalen Bahn muß eine der irreduziblen Komponenten Y_i sein. Q.E.D.

Dieses Korollar spielt im Paragraphen 3 eine Rolle. Ein weiteres Korollar beschäftigt sich mit der Abbildung $\pi = (p_1, \ldots, p_r): V \to k^r$. Obwohl für beliebiges G ihre Eigenschaften fast so gut sind, will ich nur eine Aussage für reduktives G formulieren. In diesem Fall ist π eine "gute" Quotienten-Abbildung bezüglich H, d.h., π parametrisiert die abgeschlossenen H-Bahnen.

KOROLLAR 2. *Sei G reduktiv, also H halbeinfach. Sei $G \cdot x$ die dichte Bahn, und $H \cdot y$ sei die abgeschlossene H-Bahn im Abschluß von $H \cdot x$. Dann besteht jede Faser von π in $W := G \cdot y$ aus genau einer (in V) abgeschlossenen H-Bahn der Dimension* $\dim W - r$. *Insbesondere ist* $\dim G_y/H_y = \dim G/H - r$.

Beweis. Offenbar ist $\pi: W \to k^r$ dominant. Q.E.D.

(2.9) SATZ. *Sei G eine halbeinfache Gruppe in guter Charakteristik $p \neq 2$, und $\mathfrak{g}$ besitze ein G-Skalarprodukt. Sei $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ ein* 0–1*-Modul in G und m der Maximalgrad der Graduierung von $\mathfrak{g}$ durch das zugehörige* 0–1*-Diagramm. Sei $p = 0$ oder $\geqslant m + 2$. Dann ist (C) erfüllt.*

Beweis. Sei λ eine passende 0-q-EPU und $S = \lambda(\mathbf{G}_m)$. Nach (1.2) läßt sich ein $x \in \mathfrak{g}_1$ mit $G_{0x}^o \subseteq H := (G_0, G_0)$ zu einem $\mathfrak{sl}_2$-Tripel ergänzen mit $h \in \mathfrak{s}$ und $y \in \mathfrak{g}_{-1}$. Sei $\mathfrak{a} = kh \oplus kx \oplus ky$.

1. *Variante* ($p = 0$). Es ist $G_{0x} = Z_{G_0}(kx) = Z_G(kh \oplus kx) = Z_G(\mathfrak{a})$, da die Invarianten einer Borel-Unteralgebra schon unter der ganzen Algebra $\mathfrak{a}$ invariant sind. Diese Gruppe ist nach dem zweiten Satz von Morozov-Jacobson [6] reduktiv.

2. *Variante* ($p = 0$ oder $\geqslant 2m + 2$). Da $(\mathrm{ad}\, x)^{2m+1} = (\mathrm{ad}\, y)^{2m+1} = 0$, ist $\mathfrak{g}$ ein vollreduzibler $\mathfrak{a}$-Modul [7, Theorem 1]. Die genauere Diskussion der Aktion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{g}$ wie in [13, S.237–239] zeigt, daß $G_{0x} = Z_{G_0}(\mathfrak{a})$; und diese Gruppe ist reduktiv, weil ihre Lie-Algebra ein nicht-ausgearteter Unterraum von $\mathfrak{g}$ ist.

3. *Variante* ($p = 0$ oder $\geqslant m + 2$). Aus (2.3)(i) sehen wir, daß $G_0 \cdot x$ die dichte Bahn in $\mathfrak{g}_1$ ist. Sei $H \cdot y$ die abgeschlossene H-Bahn im Abschluß von $H \cdot x$. Nach dem Korollar 2 in (2.7) ist $\dim G_{0y}/H_y = \dim G_{0x}/H_x = 0$, also $G_{0y}^o \subseteq H$. Nach (2.3)(i) ist auch $G_0 \cdot y$ die dichte Bahn in $\mathfrak{g}_1$. Also ist $G_0 \cdot x = G_0 \cdot y$ und $H \cdot x = H \cdot y$ abgeschlossen, also $G_{0x}^o = H_x{}^0$ reduktiv.

Q.E.D.

Für welche Gruppen ist auf diese einfache Weise (E) bewiesen? Das kann man aus der vorletzten Spalte der Tabelle in (2.10) entnehmen. Im Satz ist der Fall, daß G einen Normalteiler vom Typ A_r mit $p \mid (r + 1)$ hat, ausgenommen. Siehe dazu die Schlußbemerkung in (2.10).

(2.10) Es wird sich herausstellen, daß einige 0–1-Diagramme nicht den Kriterien (I)–(IV) unterliegen. Bei diesen gelten für m folgende obere Grenzen:

$$E_6 : 5, \qquad E_7 : 6, \qquad E_8 : 11.$$

Würde man nur die unmittelbar verifizierbaren Kriterien (I) und (IIa/b) anwenden, so wären dies die Grenzen:

$$F_4 \text{ und } E_6 : 6, \qquad E_7 : 9, \qquad E_8 : 15.$$

Das ergibt die folgende Tabelle von Primzahl-Charakteristiken.

A_l	—	—	$\leqslant 2 + \left[\frac{l+1}{2}\right]$	$\leqslant 4l + 1$
$B_l\ (l \geqslant 2)$, $C_l\ (l \geqslant 3)$	2	2	$\leqslant l + 2$	$\leqslant 8l - 3$
$D_l\ (l \geqslant 4)$	2	2	$\leqslant l + 1$	$\leqslant 8l - 11$
G_2	2, 3	2, 3	2, 3	$\leqslant 19$
F_4	2, 3	2, 3	$\leqslant 7$	$\leqslant 43$
E_6	2, 3	2, 3, 5	$\leqslant 7$	$\leqslant 43$
E_7	2, 3	$\leqslant 7$	$\leqslant 7$	$\leqslant 67$
E_8	2, 3, 5	$\leqslant 11$	$\leqslant 13$	$\leqslant 113$

In Spalte 2 stehen die schlechten Charakteristiken, in Spalte 3 die, die bei Anwendung von (1.8) und (I)–(IV) übrig bleiben [in Spalte 4 die von (I) und (IIa/b) ausgelassenen. In der letzten Spalte schließlich stehen die, die nicht sehr gut sind; für diese funktionierte die Methode von Dynkin, Kostant, Bala, Carter und Vinberg nicht.

Eine Anmerkung zur vierten Spalte bei A_l ist noch angebracht: Dort müßte wegen der Forderung nach einem G-Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ noch der Fall $p = l + 1$ ausgeschlossen werden. Man behilft sich wieder, indem man $\mathbf{GL}_p$ statt $\mathbf{SL}_p$ betrachtet. Dort kann man nach kurzer Überlegung (2.3)(i) anwenden.

3. Der Beweis von (E)

In diesem Paragraphen will ich feststellen, wie weit die Kriterien aus (2.7) bei den Ausnahmegruppen tragen. Dabei werden 11 Diagramme übrig bleiben, die leicht explizit behandelt werden können. Da dieses Verfahren nicht besonders elegant ist, verweise ich noch einmal auf die Tabelle in (2.10): Aus ihr kann man ablesen, unter welchen Einschränkungen der Charakteristik diese explizite Rechnung vermieden wird.

(3.1) $G = G_2$ mit $p \neq 2, 3$. Nach Kriterium (I) sind nur noch die 0–1-Diagramme

$$1 \Lleftarrow 0 \qquad \text{und} \qquad 0 \Lleftarrow 1$$

zu untersuchen. Diese beiden Diagramme werden von (IIa/b) erledigt, weil die Koeffizienten der höchsten Wurzel durch $3 \Lleftarrow 2$ gegeben sind (in naheliegender Kurzschreibweise).

(3.2) $G = F_4$ mit $p \neq 2, 3$. Die Koeffizienten der höchsten Wurzel sind $2–4 \Leftarrow 3–2$. Für Diagramme ohne benachbarte Einsen (Kriterium (I)) ist $m \leqslant 3$ (Kriterium (IIa/b)) außer in den 4 Fällen

$$0–1 \Leftarrow 0–0, \qquad 0–1 \Leftarrow 0–1, \qquad 1–0 \Leftarrow 0–1, \qquad 1–0 \Leftarrow 1–0.$$

Die ersten beiden definieren die gleichen 0–1-Moduln wie die Diagramme 0–1–0–0 und 0–1–0–1 in A_4 und scheiden daher aus. Im dritten Diagramm ist $m = 4$, $d_0 = 12$, $d_1 = 9$, $d_4 = 1$; also kommt (IIa/c) zum Zuge. Das letzte Diagramm wird von (IIIb) erledigt, siehe das erste Beispiel in (2.6).

(3.3) $G = E_6$ mit $p \neq 2, 3$. Die Koeffizienten der höchsten Wurzel sind

$$\begin{array}{c} 1–2–3–2–1 \\ | \\ 2 \end{array}$$

Daher gibt es 10 Diagramme ohne benachbarte schwarze Knoten mit $m \geqslant 4$, nämlich die folgenden 7 und außerdem 3 dazu symmetrische:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0&-&0&-&1&-&0&-&1\\ &&&&|&&&&\\ &&&&0&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&1\\ &&&&|&&&&\\ &&&&0&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccc} 0&-&1&-&0&-&1&-&0\\ &&&&|&&&&\\ &&&&0&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccc} 0&-&0&-&0&-&1&-&0\\ &&&&|&&&&\\ &&&&1&&&& \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1&-&0&-&0&-&1&-&0\\ &&&&|&&&&\\ &&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccc} 0&-&1&-&0&-&1&-&0\\ &&&&|&&&&\\ &&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccc} 1&-&0&-&0&-&0&-&1\\ &&&&|&&&&\\ &&&&1&&&& \end{array}.$$

Das Kriterium (III) erledigt das erste, dritte, vierte, fünfte und sechste davon. Beim siebten ist (IIa/c) anwendbar: $m = 4$, $d_0 = 18$, $d_1 = 14$, $d_4 = 1$. Das zweite bleibt übrig:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&1\\ &&&&|&&&&\\ &&&&0&&&& \end{array} \quad (1).$$

(3.4) $G = E_7$ mit $p \neq 2, 3$. Die Koeffizienten der höchsten Wurzel sind

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1&-&2&-&3&-&4&-&3&-&2\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&2&&&& \end{array}.$$

Es gibt 27 Diagramme ohne benachbarte Einsen und mit $m \geqslant 4$. Die folgenden 16 werden vom Kriterium (III) erledigt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&0&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&0&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&0&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&0&&&& \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 1&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0&-&1&-&0&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&0&&&& \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&1\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&0&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&0&&&& \end{array},$$

wobei das letzte vom noch nicht ausgeschiedenen Diagramm (1) abhängt. Weitere 2 schafft das Kriterium (IV):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0&-&0&-&0&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccc} 0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&0\\ &&&&&&|&&&&\\ &&&&&&1&&&& \end{array}.$$

Außerdem unterliegen noch 4 dem Kriterium (IIa/c):

$$\begin{array}{ccccccccccc}1&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&|\\&&&&&&0\end{array}\quad : \quad m=4,\quad d_0=29,\quad d_1=25,\quad d_4=2;$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&|\\&&&&&&0\end{array}\quad : \quad m=4,\quad d_0=33,\quad d_1=24,\quad d_4=1;$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}1&-&0&-&0&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&|\\&&&&&&1\end{array}\quad : \quad m=5,\quad d_0=27,\quad d_1=20,\quad d_4=5;$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0\\&&&&&&|\\&&&&&&0\end{array}\quad : \quad m=4,\quad d_0=29,\quad d_1=22,\quad d_4=5.$$

Folgende 5 Stück bleiben übrig:

$$\begin{array}{ccccccccccc}1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0\\&&&&&&|\\&&&&&&0\end{array}\ (2),\qquad \begin{array}{ccccccccccc}0&-&1&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&|\\&&&&&&0\end{array}\ (3),\qquad \begin{array}{ccccccccccc}0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&|\\&&&&&&0\end{array}\ (4),$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&|\\&&&&&&0\end{array}\ (5),\qquad \begin{array}{ccccccccccc}0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&|\\&&&&&&1\end{array}\ (6).$$

(3.5) $G=E_8$ mit $p\neq 2, 3, 5$. Die Koeffizienten der höchsten Wurzel sind

$$\begin{array}{ccccccccccccc}2&-&3&-&4&-&5&-&6&-&4&-&2\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&3\end{array}\ .$$

Es gibt 46 Diagramme ohne benachbarte Einsen und mit $m\geqslant 6$. Die folgenden 33 werden vom Kriterium (III) erledigt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&0\end{array}\ ,\quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&0\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&0\end{array}\ ,\quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&1\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&0\end{array}\ ,$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&0\end{array}\ ,\quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&1\end{array}\ ,\quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&1\end{array}\ ,$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&0\end{array}\ ,\quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&1\end{array}\ ,\quad \begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|\\&&&&&&&&1\end{array}\ ,$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&1&-&0&-&1&-&0&-&1\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array}, \quad \begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array},$$

wobei die beiden letzten noch von (1) bzw. (2) abhängen.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&1&&&&\end{array}$$

unterliegt dem Kriterium (IV). Auf weitere 5 Fälle läßt sich das Kriterium (IIa/c)$_1^*$ anwenden:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}1&-&0&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0\\&&&&&&&&|&&&&\\&&&&&&&&0&&&&\end{array} : \quad m = 6, \quad d_0 = 40, \quad d_1 = 36, \quad d_6 = 1;$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&0\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&0&&&& \end{array} : \quad m = 6, \quad d_0 = 50, \quad d_1 = 34, \quad d_6 = 1;$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&0&&&& \end{array} : \quad m = 6, \quad d_0 = 38, \quad d_1 = 32, \quad d_6 = 3;$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&0&-&0\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&1&&&& \end{array} : \quad m = 6, \quad d_0 = 40, \quad d_1 = 32, \quad d_6 = 2;$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1&-&0&-&0&-&0&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&1&&&& \end{array} : \quad m = 7, \quad d_0 = 38, \quad d_1 = 27, \quad d_6 = 6.$$

Mit (IIa/b) für $p \neq 7$ und (IId) für $p = 7$ scheiden aus:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&0&&&& \end{array} : \quad m = 8, \quad d_0 = 34, \quad d_1 = 26, \quad d_6 = 8, \quad d_8 = 1;$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&1&&&& \end{array} : \quad m = 8, \quad d_0 = 30, \quad d_1 = 25, \quad d_6 = 6, \quad d_8 = 2.$$

Damit bleiben folgende 5 Diagramme übrig:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&0&&&& \end{array} \quad (7), \qquad \begin{array}{ccccccccccccc} 1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&0&&&& \end{array} \quad (8),$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1&-&0\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&0&&&& \end{array} \quad (9), \qquad \begin{array}{ccccccccccccc} 1&-&0&-&0&-&1&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&0&&&& \end{array} \quad (10),$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1&-&0&-&1&-&0&-&0&-&0&-&1\\ &&&&&&&&|&&&&\\ &&&&&&&&1&&&& \end{array} \quad (11).$$

(3.6) Die übrigen 11 Diagramme werden durch explizite Rechnung behandelt. Diese ist natürlich etwas langwierig (und langweilig), aber elementar: Bei den zugehörigen 0–1-Moduln handelt es sich stets um einfach zu beschreibende Darstellungen von reduktiven Gruppen, deren sämtliche fasteinfache Normalteiler vom Typ A_l sind. Ich will diese Rechnungen hier nicht wiedergeben, aber die wesentlichen Tricks und Methoden aufzählen.

(1) Die Codimension einer quasifreien Bahn ist beschränkt; ich will das an einem Beispiel erläutern. Beim Diagramm (11) ist $m = 11$, und die Dimensionen d_0 bis d_{11} sind der Reihe nach: 22, 20, 18, 18, 14, 13, 10, 8, 5, 4, 2, 1. Nach dem Kriterium (IIa/b) scheidet das Diagramm aus, außer wenn $p = 7$ oder $p = 11$. Wenn es ein quasifreies $x \in \mathfrak{g}_1$ gibt, muß nach (2.4) gelten $q_1 = 2$ für $p = 11$ und $q_1 = 5$ für $p = 7$. Also ist nach dem Lemma in (2.3) auf jeden Fall

$$\dim \mathfrak{g}_{0x} + \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1} \leqslant 5,$$

$$\dim \mathfrak{g}_{0x} = 2 + \dim \mathfrak{g}_x \cap \mathfrak{g}_{-1} .$$

Das geht nur, wenn $\dim G_{0x} \leqslant 3$, d.h., wenn die Bahn $G_0 \cdot x$ höchstens 1-codimensional ist. Der gleiche Schluß liefert, daß bei (4) nur die dichte Bahn und bei (3), (6), (7), (8), (9), (10) und (11) nur die Bahnen bis zur Codimension 1 zu untersuchen sind.

In allen diesen Fällen kann ich die fraglichen Bahnen explizit angeben und ihren Stabilisator berechnen; die Zahl der 1-codimensionalen Bahnen ist dabei nach dem Korollar 1 in (2.8) durch den Stabilisator der dichten Bahn festgelegt.

(2) Falls das Diagramm mehrere Einsen enthält, kann ich einen irreduziblen Summanden von $\mathfrak{g}_1$ weglassen und erhalte einen 0–1-Modul in halbeinfachen Teil einer echten Levi-Typ-Untergruppe. Dort kann ich die Vinberg-Klassifikation anwenden; ich muß nur ($\hat{\mathrm{E}}$) für diese Untergruppe schon bewiesen haben. Für die klassischen Gruppen berufe ich mich dabei auf (1.8). Dieses Verfahren wird angewendet auf die Diagramme (2) und (5).

(3) Es sind nur Bahnen von Elementen zu untersuchen, die in der Zerlegung von $\mathfrak{g}_1$ in die (eindimensionalen) Gewichtsräume mindestens Rang G Koordinaten $\neq 0$ haben. In Verbindung mit Methode 2 findet man bei (5) leicht in jeder Bahn ein Element, das gegen diese Bedingung verstößt. Das gleiche gilt für die (ausgezeichneten) Diagramme (1) und (2) außerhalb der dichten Bahn.

Bei all den zu untersuchenden Bahnen findet sich im Stabilisator, sofern er nicht endlich ist, ein mindestens eindimensionaler Torus. Dadurch wird das Theorem (1.5) bewiesen: Jede halbeinfache Gruppe in guter Charakteristik hat die Eigenschaft ($\hat{\mathrm{E}}$).

(3.7) Was kann man in schlechter Charakteristik sagen? Daß die Zahl der nilpotenten Klassen endlich ist, ging in guter Charakteristik im wesentlichen nur in die Aussage ein, daß jede nilpotente Bahn ein Kegel ist, d.h., mit jedem Element x die ganze punktierte Gerade $k^{\times}x$ enthält. Ferner hängen einige der

Kreitrien gegen quasifreie Bahnen in 0–1-Moduln nicht oder nicht wesentlich von der Charakteristik ab. Daraus leitet man z.B. fast ohne zusätzlichen Aufwand her: Die Bala-Carter-Klassifikation gilt in E_6 auch in Charakteristik 2 und 3 für *diejenigen* nilpotenten Bahnen, *die Kegel sind.*

Literatur

1. P. Bala and R. W. Carter, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups, I, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79** (1976), 401–425.
2. P. Bala and R. W. Carter, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups, II, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **80** (1976), 1–18.
3. V. Gatti and E. Viniberghi, Spinors of 13-dimensional space, *Advances in Math.* **30** (1978), 137–155.
4. W. Hesselink, Polarizations in the classical groups, *Math. Z.* **160** (1978), 217–234.
5. W. Hesselink, Nilpotency in classical groups over a field of characteristic 2, *Math. Z.* **166** (1979), 165–181.
6. N. Jacobson, Completely reducible Lie algebras of linear transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 105–113.
7. N. Jacobson, A note on three dimensional simple Lie algebras, *J. Math. Mech.* **7** (1958), 828–831.
8. V. G. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math.* **56** (1980), 57–92.
9. K. Pommerening, Über die unipotenten Klassen reduktiver Gruppen, *J. Algebra* **49** (1977), 525–536.
10. V. S. Pyasetskii, Linear Lie groups acting with finitely many orbits, *Functional Anal. Appl.* **9** (1975), 351–353.
11. M. Rosenlicht, Some basic theorems on algebraic groups, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 401–443.
12. M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), 1–155.
13. T. A. Springer and R. Steinberg, Conjugacy classes, *in* "Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups" (A. Borel *et al.*, Eds.) Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
14. E. B. Vinberg, On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras, *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975), 1517–1520.
15. A. G. Elashvili, Stationary subalgebras of points of the common state for irreducible linear Lie groups, *Functional Anal. Appl.* **6** (1972), 139–148.

Printed by the St. Catherine Press Ltd., Tempelhof 37, Bruges, Belgium