Lineare Rekursionsformeln, Matrizen und Eigenwerte

Klaus POMMERENING, Mainz

INHALT

EINLEITUNG

Das Eigenwertproblem ist das zentrale Problem der Matrizenrechnung und der Linearen Algebra. In seinem allgemeinen Umfang übersteigt es das Niveau der Schulmathematik bei weitem. Dennoch können einfache Fälle zumindest auf dem Niveau von Leistungskursen oder Facharbeiten behandelt werden.

In diesem Vortrag wird aus einer konkreten Aufgabe, der Suche nach einer expliziten Formel für das allgemeine Glied einer Folge, die durch zweistufige lineare Rekursion definiert ist, das Eigenwertproblem für (2,2)-Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entwickelt und gelöst. Als Zwischenstufe tritt das Problem auf, die n-te Potenz einer (2,2)-Matrix zu berechnen; dieses kann ebenso als Motivation für das Eigenwertproblem dienen.

Benützt wird dabei:
- das Rechnen mit (2,2)-Matrizen,
- das Lösen quadratischer Gleichungen,
- die Darstellung von Spaltenvektoren der Länge 2 durch Basen.

Die Anwendung der expliziten Lösungsformel wird an einigen Beispielen vorgeführt. Es schließt sich eine Reihe von Aufgaben an.

Die linearen Rekursionsformeln bilden ein elementares Analogon zu den gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen höherer, speziell zweiter, Ordnung; ein konkreter Zusammenhang wird in Aufgabe 15 hergestellt. Auch zu verschiedenen anderen Teilen der Mathematik bestehen Zusammenhänge, die in Beispielen, Bemerkungen und Aufgaben aufgegriffen werden.

§1 Lineare Rekursionsformeln

Sie alle kennen die FIBONACCI-Folge

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots\ ;$$

jedes neue Folgenglied entsteht durch Addition der beiden vorangegangenen. Die allgemeine Formel für das n-te Glied heißt also

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (\text{für } n = 2, 3, 4, \ldots)$$

mit der Anfangsbedingung (etwa) $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Wir haben hier das einfachste und historisch älteste Beispiel für die Definition einer Folge durch eine zweistufige lineare Rekursionsformel, wobei der Begriff "zweistufig" sich selbst erklärt. Diese Folge trat 1202 im "liber abaci" von Leonardo von Pisa, genannt FIBONACCI, in einer Übungsaufgabe auf, in der es sich darum handelte, die Nachkommenschaft eines Kaninchenpaares zu zählen. Das ist, wenn man so will, das älteste mathematische Modell in der Populationsdynamik: Es wird angenommen, daß ein Kaninchenpaar vom zweiten Monat seiner Existenz an jeden Monat ein neues Paar hervorbringt, welches sich in gleicher Weise fortpflanzt. Die Anzahl der Paare nach n Monaten ist dann F_{n+1}, und sie besteht aus den F_n bereits vorhandenen Paaren plus F_{n-1} neu geborenen. FIBONACCI geht es aber nicht um Populationsdynamik, sondern um das Üben der Addition, und er fragt nach der Zahl der Kaninchen nach einem Jahr, also nach der FIBONACCI-Zahl F_{13}. Andere Motivationen für die FIBONACCI-Zahlen finden sich in § 7 und in der am Ende aufgeführten Literatur.

Ein modernes Beispiel schließt sich an die Vorträge über stochastische Matrizen an. Im Abschnitt 8 ("Des Spielers Ruin") trat dort die Rekursionsformel

$$-pd_{j+1} + d_j - qd_{j-1} = 0$$

oder, anders geschrieben,

$$d_{j+1} = \frac{1}{p}\, d_j - \frac{q}{p}\, d_{j-1} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n-1$$

auf mit der Nebenbedingung $d_0 = 1$, $d_n = 0$. Auch hier haben wir also eine zweistufige lineare Rekursionsformel, von der allerdings nur ein endlicher Teil interessiert; auch ist die Anfangsbedingung hier durch eine Randbedingung ersetzt, aber das wird sich als unproblematisch erweisen.

Betrachten wir ganz allgemein eine Folge $(x_n \mid n = 0,1,2,...)$, die durch eine Rekursionsformel

$$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2} \qquad \text{für } n = 2,3,4, \ldots$$

mit der Anfangsbedingung $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$ gegeben ist, wobei p, q, a_0, a_1 beliebige reelle Zahlen sind. Auch diese Formel kann man populationsdynamisch deuten, indem man x_n als Zahl der Paare der n-ten Generation ansieht und annimmt, daß die ein Jahr alten Paare p, die zwei Jahre alten q neue Paare hervorbringen. Auch in anderen Anwendungsgebieten treten solche Formeln auf, wenn diskrete Vorgänge beschrieben werden, die durch die Zustände in den letzten beiden Zeiteinheiten beeinflußt werden, etwa in Physik und Wirtschaftswissenschaften.

Unsere Aufgabe soll heißen: Finde eine explizite Formel für das n-te Glied der Gestalt

$$x_n = \text{Ausdruck in } p, q, a_0, a_1 \text{ und } n.$$

Die Frage, ob man aus einer solchen expliziten Formel mehr über die Reihe ablesen kann als aus der ursprünglichen Rekursionsformel, will ich im Moment nicht verfolgen; für die FIBONACCI-Folge ist es vielleicht nicht so unmittelbar einzusehen, im Beispiel von "Des Spielers Ruin" ist die explizite Formel ja das direkte Ziel, wobei natürlich noch die anders gestellte Nebenbedingung zu berücksichtigen ist. Weitere Beispiele stehen in den Aufgaben.

§2 LÖSUNGSANSATZ

Wie soll man ein solches Problem anpacken? Es gibt eine "faule" Möglichkeit: Man nimmt die fertige Formel irgendwo her und beweist sie durch Induktion (siehe Aufgabe 10). Ich will aber davon reden, wie man die Lösung selbst findet. Gibt es ein analoges einfacheres Problem? Ja: eine einstufige Rekursionsformel

$$x_n = px_{n-1} \quad \text{mit} \quad x_0 = a.$$

Hier kann man die Lösung sofort hinschreiben:

$$x_n = ap^n .$$

Im zweistufigen Fall können wir zunächst die Rekursion verkürzen, indem wir eine zusätzliche Folge (y_n) durch $y_0 = 0$ und

$$y_n = x_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

einführen. Dann erhalten wir die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} x_n &= px_{n-1} + qy_{n-1} , \\ y_n &= x_{n-1} , \end{aligned}$$

die nur einen Schritt zurückreichen; dafür sind die beiden Folgen x und y gekoppelt, wir haben uns also eine neue Komplikation eingehandelt. Gehen wir nun an unser Problem mit der Vorstellung "lineare Probleme löst man durch Matrizenrechnung", so kommen wir vielleicht auf die Idee, folgende Gleichung hinzuschreiben:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} ,$$

oder, wenn wir y wieder eliminieren und den Index um 1 vergrößern,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so steht analog zum einstufigen Fall sofort die Lösung da:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen also nur noch die Matrix A zu potenzieren! Tun wir das doch einmal für die FIBONACCI-Folge. Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Potenzen von A sind der Reihe nach

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \ldots \; !?$$

Sollte hier etwa ... ? Ja: In den Einträgen dieser Matrizen treten genau wieder FIBONACCI-Zahlen auf (siehe Aufgabe 12). Wir kommen nicht um die Einsicht herum, daß unsere ganze schöne Formel nichts nützt: Die Matrix A^n kennen wir genau so wenig explizit wie das allgemeine Folgenglied x_n. Auch im Vortrag über stochastische Matrizen wurde ja schon darauf hingewiesen, daß eine beliebige Potenz einer gegebenen Matrix im allgemeinen nicht leicht zu finden ist.

Werfen wir die Flinte nicht gleich ins Korn, sondern denken wir etwas nach! Gibt es Umstände, in denen wir mit der "expliziten" Formel doch etwas anfangen könnten? Ja, und hier zeigt sich ein Vorteil der allgemeinen Formulierung des Problems: Die Anfangsbedingungen sind variabel. Falls nämlich der Vektor

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

von der Matrix A bis auf einen Faktor reproduziert wird,

$$Aa = ra \text{ mit einer (etwa reellen) Zahl } r,$$

dann ist

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2a_1 \\ r^2a_0 \end{pmatrix},$$

und allgemein $x_n = r^n a_0$. Falls wir als Anfangsbedingung einen Eigenvektor erwischt haben, können wir uns also zur erfolgreichen Lösung gratulieren. Und sonst? Stellen wir uns ganz vermessen vor, wir würden sogar zwei Eigenvektoren b und c kennen, die zu verschiedenen Eigenwerten r und s gehören. Dann sind b und c linear unabhängig (siehe Aufgabe 3), wir können den beliebigen "Anfangsvektor" a als Linearkombination

$$a = ub + vc$$

schreiben und erhalten

$$\begin{aligned} Aa &= uAb + vAc = urb + vsc\,, \\ A^n a &= ur^n b + vs^n c\,, \\ x_n &= ub_0\, r^n + vc_0\, s^n\,, \\ (*)\quad x_n &= kr^n + ls^n\,, \end{aligned}$$

mit Koeffizienten k und l, die nicht von n abhängen. Diese kann man direkt aus den Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\begin{aligned} a_0 &= k + l\,, \\ a_1 &= kr + ls\,, \\ k(r-s) &= a_1 - sa_0\,, \\ l(s-r) &= a_1 - ra_0\,, \\ k &= \frac{a_1 - sa_0}{r - s}\,, \\ l &= \frac{a_1 - ra_0}{s - r}\,. \end{aligned}$$

Damit die Formel (*) wirklich x_n durch p, q, a_0, a_1 und n ausdrückt, müssen also nur noch die Eigenwerte r und s von A bestimmt werden.

§3 Das Eigenwertproblem

Wir suchen Eigenwerte t und Eigenvektoren $\binom{x}{y}$ unserer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h., wir wollen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} px + qy &= tx \\ x &= ty \end{aligned}$$

lösen. Wir können o.B.d.A. $q \neq 0$ annehmen, denn sonst war unsere Rekursionsformel nur einstufig. Dann folgt aus der ersten Gleichung

$$y = \frac{(t-p)}{q} x ,$$

also aus der zweiten

$$x = \frac{t(t-p)}{q} x .$$

Der Fall x = 0 führt auf die für das Eigenwertproblem uninteressante Lösung x = y = 0, t beliebig. Wir können also $x \neq 0$ annehmen und erhalten

$$\frac{t(t-p)}{q} = 1 ,$$

$$t^2 - pt - q = 0.$$

Diese Gleichung heißt "die charakteristische Gleichung" sowohl der Matrix als auch der Rekursionsformel. Natürlich kann man sie auch direkt aus dem Determinantenkriterium für homogene lineare Gleichungssysteme herleiten. Ihre Lösungen sind

$$r = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} , \quad s = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} .$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind nur bis auf einen Faktor bestimmt; da x in beiden Fällen nicht 0 ist, können wir sogar x = 1 setzen und erhalten die Eigenvektoren

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r-p}{q} \end{pmatrix} , \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{s-p}{q} \end{pmatrix} ,$$

die wir aber für unsere Formel (*) gar nicht mehr brauchen. Setzen wir r und s in (*) ein, so erhalten wir die gesuchte explizite Formel, die mir aber zum Hinschreiben zu unästhetisch ist! Besser ist es, sich das Ergebnis in folgender Form zu merken:

<u>SATZ 1</u> (N. BERNOULLI 1728)

Die Folge (x_n) erfülle die Rekursionsformel $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$. Die charakteristische Gleichung $t^2 - pt - q = 0$ habe zwei verschiedene Nullstellen r und s. Dann gilt:

(i) $x_n = kr^n + ls^n$ mit Konstanten k und l.

(ii) Erfüllt die Folge außerdem die Anfangsbedingungen $x_0 = a_0$ und $x_1 = a_1$, so ist sie eindeutig bestimmt, und zwar ist

$$x_n = \frac{a_1 - sa_0}{r - s} r^n + \frac{a_1 - ra_0}{s - r} s^n .$$

Ich habe vorausgesetzt, daß die Eigenvektoren b und c linear unabhängig sind. Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn die Eigenwerte r und s verschieden sind, wenn also $p^2 + 4q \neq 0$ ist.

Im Fall $p^2 + 4q < 0$ stehen in der Formel für die reelle Zahl x_n komplexe Zahlen r und s, aber das soll hier nicht weiter stören - in den Beispielen werden die Eigenwerte reell sein. Allgemein ist es natürlich besser, auch für die Folgen von vornherein komplexe Zahlen zuzulassen. Will man aber nur mit reellen Zahlen rechnen, wie es für eine Behandlung des Problems in der Schule wohl angebracht ist, so steht man - wie bei der Formel von CARDANO für die Gleichung dritten Grades - vor dem Phänomen, daß man reelle Lösungen aus Formeln gewinnen muß, in denen komplexe Zahlen vorkommen.

Was passiert aber in dem speziellen Fall, wo $p^2 + 4q = 0$, also $r = s = p/2$ ist? Nun, wir haben jedenfalls zum Eigenwert r den einen Eigenvektor

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{r-p}{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{p}{2q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}.$$

Sei c jetzt irgendein von b linear unabhängiger Vektor; dann ist $Ac = yb + zc$ mit irgendwelchen Koeffizienten y und z. Falls $y = 0$, ist z Eigenwert, also $z = r$, und c ein weiterer Eigenvektor. Das kann im Prinzip bei einer (2,2)-Matrix A passieren, aber dann muß A alle Vektoren mit r multiplizieren, also $=$ rE sein, was für unsere Matrix definitiv nicht stimmt. (Hier besteht die Gefahr, daß der Zugang zum Eigenwertproblem unter unseren etwas vereinfachenden Annahmen Illusionen über den allgemeinen Fall erzeugt!) Also ist $y \neq 0$, und wir können c mit dem Faktor $1/y$ multiplizieren, also o.B.d.A. $y = 1$ annehmen. Wählen wir nur speziell $c = \binom{w}{o}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} pw \\ w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = b + zc = \begin{pmatrix} 1+zw \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix},$$

also $w = 2/p$, $pw = 2$, $2z/p = 1$, $z = p/2 = r$ und

$$Ac = b + rc.$$

Ist nun $a = ub + vc$, so

$$\begin{aligned} Aa &= urb + v(b+rc) = (ur+v)b + vrc\ , \\ A^2a &= (ur+v)rb + vr(b+rc) = (ur^2+2vr)b + vr^2c\ , \\ A^3a &= (ur^2+2vr)rb + vr^2(b+rc) = (ur^3+3vr^2)b + vr^3c\ , \end{aligned}$$

und durch Induktion

$$A^na = (ur^n + nvr^{n-1})b + vr^nc\ ,$$

$$(**) \quad x_n = kr^n + nlr^{n-1}$$

mit von n unabhängigen Koeffizienten k und l, die man wieder aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} a_0 &= k, & k &= a_0\ , \\ a_1 &= kr + l, & l &= a_1 - kr = a_1 - a_0r\ . \end{aligned}$$

In diesem Fall sieht die Lösungsformel also so aus:

$$x_n = a_0 r^n + (a_1 - a_0 r) n r^{n-1} \quad ,$$

und wir können das Ergebnis zusammenfassen:

SATZ 2

Die Folge (x_n) sei durch die Rekursionsformel $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$ mit den Anfangsbedingungen $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$ definiert. Die charakteristische Gleichung $t^2 - pt - q = 0$ habe nur eine Lösung r. Dann ist $r = p/2$ und

$$x_n = na_1 \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} - (n-1)a_0 \left(\frac{p}{2}\right)^n \quad .$$

§4 Die Beispiele

Bei der FIBONACCI-Folge ist $p = q = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$; die Eigenwerte

$$r = (1+\sqrt{5})/2, \qquad s = (1-\sqrt{5})/2,$$

sind verschieden. Wir haben also Satz 1 anzuwenden mit $r-s = \sqrt{5}$ und erhalten

SATZ 3 (DE MOIVRE 1718). Die n-te FIBONACCI-Zahl ist

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \quad .$$

Diese Formel kann man natürlich wieder, wenn man sie erst einmal hat, durch vollständige Induktion bewiesen (siehe Aufgabe 10). Da F_n ganzzahlig ist, wirkt dieser Ausdruck auf den ersten Blick vielleicht befremdlich; wertet man ihn mit Hilfe der binomischen Formel aus, kommt man aber auch auf einen ganzzahligen Ausdruck. Da $-1 < s < 0$ und $1/\sqrt{5} < 1/2$, ist $|s^n/\sqrt{5}| < 1/2$ für alle n. Daraus folgt:

KOROLLAR. Die n-te FIBONACCI-Zahl ist die ganze Zahl, die durch Rundung von $r^n/\sqrt{5}$ entsteht.

Im Beispiel von "des Spielers Ruin" ist die charakteristische Gleichung

$$0 = t^2 - \frac{1}{p}\, t + \frac{q}{p} = (t - \frac{q}{p})(t - 1)$$

(da $p + q = 1$). Die Eigenwerte sind

$$r = \frac{q}{p} \quad \text{und} \quad s = 1 \; .$$

Wegen der anders gestellten Nebenbedingungen können wir nicht die Sätze 1 (ii) und 2 anwenden. Satz 1 (i) und Formel (**) gelten aber auch hier, wobei die Koeffizienten k und l jetzt aus der Kenntnis von d_0 und d_n bestimmt werden, wie es im Abschnitt über stochastische Matrizen vorgeführt wird (vgl. S. 21 - 23).

§5 Lösung ohne Matrizen

Die Abbildung, die jeder Anfangsbedingung a aus $\mathbb{R}^2$ die zugehörige Folge x im Vektorraum aller reellen Folgen zuordnet, ist linear. Der Bildraum besteht genau aus den Folgen, die die Rekursionsformel erfüllen und ist zweidimensional (siehe Aufgabe 8). Findet man also zwei linear unabhängige spezielle Lösungen, so kann man alle anderen daraus kombinieren. Der Ansatz $x_n = t^n$ mit $t \neq 0$ führt auf

$$t^n = pt^{n-1} + qt^{n-2} \quad ,$$

also genau auf die charakteristische Gleichung

$$t^2 - pt - q = 0 \; .$$

Nennt man ihre Nullstellen r und s, so hat man, falls $r \neq s$, die allgemeine Lösung

$$x_n = kr^n + ls^n$$

wie in §2. Im Fall $r = s$ setzt man als weitere Lösung $x_n = nt^{n-1}$ an und verfährt weiter wie am Ende von §3.

Dieser Lösungsansatz ist zwar schneller und auch leicht zu merken, aber begrifflich komplizierter. Eine andere Lösung (N. BERNOULLI 1728) beruht auf der Bemerkung, daß x_n der Koeffizient von t^n in der Potenzreihen-Entwicklung der rationalen Funktion

$$R(t) = \frac{a_0 + (a_1 - pa_0)t}{1 - pt - qt^2}$$

ist. Faktorisiert man den Nenner als $(1-rt)(1-st)$ und entwickelt beide Faktoren $1/(1-rt)$ und $1/(1-st)$ als geometrische Reihen, kann man die Lösungsformel ablesen.

Die allerschnellste Methode, wie gesagt, ist der Beweis der fertigen Lösungsformel durch vollständige Induktion (siehe Aufgabe 10).

§6 Mehrstufige Rekursionsformeln

Mit den gleichen Methoden kann man mehrstufige lineare Rekursionsformeln

$$x_n = p_1 x_{n-1} + \dots + p_m x_{n-m} \qquad \text{für } n = m, \; m+1, \dots$$

mit Anfangsbedingungen $x_n = a_n$ für $n = 0, \dots, m-1$ behandeln. Der "Matrizen-Ansatz" ist

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n-m} \end{pmatrix} .$$

Die charakteristische Gleichung, die man als charakteristische Gleichung der Matrix oder durch den speziellen Lösungsansatz $x_n = t^n$ erhält, ist jetzt

$$t^m - p_1 \; t^{m-1} - \ldots - p_m = 0 .$$

<u>SATZ 4</u> (LAGRANGE 1775)

Die charakteristische Gleichung habe m verschiedene Nullstellen $r_1,\ldots,r_m$. Dann ist

$$x_n = k_1 \, r_1^{\,n} + \ldots + k_m \, r_m^{\,n} ,$$

wobei die Koeffizienten k_i wieder aus den Anfangsbedingungen zu gewinnen sind.

Der Beweis verläuft wie im Fall m = 2, nur daß man jetzt mit Eigenwerten von (m,m)-Matrizen umgehen muß.

§7 Anwendungen der expliziten Formeln

Zum Schluß möchte ich für die FIBONACCI-Zahlen noch einmal die Frage aufgreifen, wozu die explizite Formel nützt. Ich will dazu Beispiele geben. Das erste Beispiel betrifft die Frage nach dem Grenzwert der Folge F_{n+1}/F_n der "FIBONACCI-Quotienten". Er ist bekanntlich gleich dem goldenen Schnitt

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ,$$

das folgt leicht aus der Formel $F_{n+1}/F_n = 1 + F_{n-1}/F_n$. Leider ist damit aber die Existenz des Grenzwerts, also die Konvergenz der Folge nicht bewiesen! Aus der expliziten Formel folgt

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - ((1-\sqrt{5})/(1+\sqrt{5}))^{n+1}}{1 - ((1-\sqrt{5})/(1+\sqrt{5}))^n},$$

und dieser Ausdruck konvergiert für $n \to \infty$ offensichtlich gegen $(1 + \sqrt{5})/2$, denn der Betrag von $(1 - \sqrt{5})/(1 + \sqrt{5})$ ist kleiner als 1. Der Konvergenzbeweis ohne die explizite Formel ist etwas kniffliger.

Die zweite Anwendung betrifft das Verhalten für große n und gilt sinngemäß für alle Rekursionsfolgen (vgl. Aufgabe 14): Der Quotient

$$\frac{F_n}{r^n} = \frac{1 - ((1-\sqrt{5})/(1+\sqrt{5}))^n}{\sqrt{5}}$$

konvergiert gegen $1/\sqrt{5}$ für $n \to \infty$. Für ungerade n ist $(1 - \sqrt{5})^n$ negativ,

$$F_n > r^n/\sqrt{5},$$

und die Folge F_n/r^n monoton fallend. Für gerade n gilt die umgekehrte Ungleichung, und die Folge steigt monoton. Also bekommt man für alle $n \geq 1$ die Abschätzung:

<u>SATZ 5</u>

Für die n-te FIBONACCI-Zahl, $n \geq 1$, gilt

$$F_n > c \cdot r^n$$

mit $c = 0.38196 < F_2/r^2$; für $n \geq 3$ kann man sogar $c = 0.43769 < F_4/r^4$ nehmen.

Dieser letzte Wert von c liegt schon sehr dicht an $1/\sqrt{5} = 0.44721...$. Aus Satz 5 kann man etwa die Stellenzahl k der 1000. FIBONACCI-Zahl abschätzen:

$$F_{1000} > 0.43769\ r^{1000},$$
$$k > \log F_{1000} > 1000 \log r + \log 0.43769$$
$$> 1000\cdot 0.20898 - 0.36 = 208.62,$$

also $k \geq 209$. (Dabei bedeutet log den Logarithmus zur Basis 10.) Da $F_{1000} < r^{1000}/\sqrt{5}$, folgt ebenso $k - 1 \leq \log F_{1000} < 208.64$. Daher ist $k = 209$, und F_{1000} beginnt mit der Ziffer 4.

Eine dritte Anwendung ist ernsthafterer Natur - die FIBONACCI-Zahlen treten in der Informatik an einigen Stellen auf, wo es um die Analyse von Algorithmen geht, beispielsweise schon beim ältesten und einfachsten aller nichttrivialen Algorithmen: Man kann mit ihrer Hilfe die Zahl der Schritte im euklidischen Algorithmus für zwei natürliche Zahlen a und b, $a \geq b > 0$, abschätzen. Dieser Algorithmus liefert den größten gemeinsamen Teiler von a und b nach folgender Rekursionsvorschrift: $r_0 = a$, $r_1 = b$, und für $i \geq 2$ ist r_i definiert als Rest der Division

$$r_{i-2} = q_{i-1}\, r_{i-1} + r_i \quad \text{mit } 0 \leq r_i < r_{i-1}\,.$$

Ist $r_{n+1} = 0$, so ist $r_n = \mathrm{ggT}(a,b)$. Die Anzahl der benötigten Divisionen, $L(a,b) := n$, heißt dann die Länge des Algorithmus. Man kann sie abschätzen, indem man die Blickrichtung umkehrt: Es ist $r_n \geq 1 = F_1 = F_2$. Da allgemein $r_{i-1} > r_i$, muß $r_{n-1} \geq 2 = F_3$ sein. Durch Induktion folgt $r_i \geq F_{n+2-i}$, denn

$$r_{i-2} \geq r_{i-1} + r_i \geq F_{n+3-i} + F_{n+2-i} = F_{n+4-i}.$$

Damit ist bewiesen:

$$\boxed{\text{Ist } L(a,b) = n, \text{ so } b \geq F_{n+1} > c\cdot r^{n+1}.}$$

Die FIBONACCI-Zahlen sind also die "schwarzen Schafe" - der schlechteste Fall im euklidischen Algorithmus ist die Bestimmung des ggT zweier aufeinanderfolgender FIBONACCI-Zahlen (deren ggT man aber durch Nachdenken leicht bestimmen kann, siehe Aufgabe 12). Es folgt
$\log b > \log c + (n+1) \log r$,

$$n + 1 < (-\log c + \log b)/\log r < 4.785\cdot(0.359 + \log b)$$
$$< 1.718 + 4.785 \log b, \quad \text{wenn } n + 1 \geq 3.$$

Da L(a,b) ganzzahlig ist, folgt also:

SATZ 6 (LAMÉ 1844)

Seien a und b natürliche Zahlen, und zwar habe b im Dezimalsystem k Stellen. Dann ist die Länge L(a,b) des euklidischen Algorithmus für a und b höchstens gleich 5k.

Dies ist unter der Voraussetzung $L(a,b) \geq 2$ bewiesen worden, gilt aber selbstverständlich auch im Fall $L(a,b) = 1$, also in jedem Fall.

Für die Anwendungen in der Zahlentheorie sei auf das Literaturverzeichnis verwiesen. Hier ist es meist so, daß man zu gegebenen Zahlen eines bestimmten Typs Rekursionsformeln sucht, die diese liefern. So ist etwa $x_n = 2^n - 1$ der n-te Term der Folge $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ mit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Allgemein ist $x_n = kp^n - 1$ durch $x_n = (p + 1)x_{n-1} - px_{n-2}$, $x_0 = k - 1$, $x_1 = kp - 1$ beschrieben. Aus der Rekursionsformel kann man Teilbarkeitseigenschaften ableiten und dann etwa untersuchen, ob x_n Primzahl ist. Auf ähnliche Weise hat LUCAS 1876 die Primzahl $2^{127} - 1$ entdeckt, und das war für 75 Jahre die größte bekannte Primzahl.

AUFGABEN

Die folgende Aufgabensammlung ist eine bunte Mischung von leichten Verständnistests und größeren Projekten, die zur weiteren Beschäftigung mit dem einen oder anderen Aspekt des Themas anregen sollen und deren Eignung für den jeweiligen Zweck oft erst noch geprüft werden muß.

1) Sei $A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit p,q reell, $q \neq 0$.

a) Gib im Fall $p^2 + 4q > 0$ eine invertierbare (2,2)-Matrix B, so daß $C := BAB^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

b) Sei $p^2 + 4q = 0$. Finde eine invertierbare (2,2)-Matrix B, so daß $C := BAB^{-1}$ die Gestalt $\begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ hat.

c) Drücke A^n durch B und C^n aus, anschließend durch B, n und die Eigenwerte von A.

d) Gib im Fall $p^2 + 4q < 0$ analog eine komplexe (2,2)-Matrix B an, für die BAB^{-1} eine Diagonalmatrix ist und bearbeite den Aufgabenteil c) entsprechend.

2) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zeige: Es gibt keine invertierbare reelle (oder komplexe) (2,2)-Matrix B, so daß BAB^{-1} eine Diagonalmatrix ist. Zeige das gleiche für $A = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

3) In dieser Aufgabe soll das Eigenwertproblem für eine beliebige reelle (oder auch komplexe) (2,2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ analog zu §3 behandelt werden. Eine reelle (oder komplexe) Zahl r heißt Eigenwert von A, wenn es einen Spaltenvektor $v \neq 0$ der Länge 2 gibt mit $Av = rv$; dann heißt v Eigenvektor von A zum Eigenwert r.

a) Zeige: r ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn die Gleichung $(rE - A)\, v = 0$ eine Lösung $v \neq 0$ hat.

b) Berechne die Determinate der Matrix $rE - A$.

c) Zeige: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des "charakteristischen Polynoms" $t^2 - (a + d)\, t + (ad - bc)$.

d) Es gebe zwei verschiedene Eigenwerte r und s. Sei u und v jeweils ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige: Dann sind u und v linear unabhängig und bilden eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{C}^2$).

e) Zeige: Hat A nur einen Eigenwert r, so ist entweder $A = rE$, oder es gibt eine invertierbare reelle (bzw. komplexe) (2,2)-Matrix B so daß $BAB^{-1} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

f) Drücke in allen Fällen A^n durch B, n und die Eigenwerte von A aus.

4) Sei A eine (2,2)-Matrix. Es gebe eine natürliche Zahl m mit $A^m = 0$.

a) Zeige: A hat nur den Eigenwert 0.

b) Zeige: $A^2 = 0$.

5) a) Sei A eine stochastische (n,n)-Matrix. Wende A auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ an und zeige: A hat den Eigenwert 1.

b) Bestimme die Eigenwerte der stochastischen (2,2)-Matrix $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.

6) Zwei Folgen $(x_n | n = 0,1,2,\ldots)$ und $(y_n | n = 0,1,2,\ldots)$ seien durch die Rekursionsformeln

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} \, ,$$
$$y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1} \quad \text{für } n = 1,2,3,\ldots$$

beschrieben; die Anfangswerte x_0 und y_0 seien gegeben.

a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ habe zwei verschiedene Eigenwerte r und s.
Zeige: $x_n = k_1 r^n + l_1 s^n$, $y_n = k_2 r^n + l_2 s^n$, wobei $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ jeweils 0 oder ein Eigenvektor zum Eigenwert r bzw. s ist.

b) Zeige: Setzt man $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, so erhält man die Rekursionsformeln

$$a_n = aa_{n-1} + bc_{n-1} \, , \qquad b_n = ab_{n-1} + bd_{n-1} \, ,$$
$$c_n = ca_{n-1} + dc_{n-1} \, , \qquad d_n = cb_{n-1} + dd_{n-1} \, .$$

Wende das Ergebnis von Aufgabenteil a) hierauf an (unter der Voraussetzung verschiedener Eigenwerte). Vergleiche die gewonnene Formel für A^n mit dem Ergebnis von Aufgabe 3f.

7) Formuliere ein analoges Ergebnis zu Satz 1 für die Rekursionsformel $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$, wenn statt der Anfangsbedingungen folgende Nebenbedingungen gegeben sind: $x_i = a$, $x_j = b$ (mit $i \neq j$).

8) Rekursionsformel mit nicht-konstanten Koeffizienten:

Seien zwei reelle Folgen $(p_n | n = 2,3,4,\ldots)$ und $(q_n | n = 2,3,4,\ldots)$ gegeben:

a) Zeige: Im Vektorraum aller reellen Folgen bilden die Folgen $(x_n | n = 0,1,2,\ldots)$ mit

$$x_n = p_n x_{n-1} + q_n x_{n-2} \quad \text{für } n = 2,3,4,\ldots$$

einen zweidimensionalen Unterraum.

b) Zeige: Sind i, j zwei verschiedene feste Indizes und a,b feste reelle Zahlen, so gibt es genau eine von diesen Folgen, die die Nebenbedingungen $x_i = a$, $x_j = b$ erfüllt.

9) Die elementarsymmetrischen Funktionen in 2 Variablen x und y sind $p = x + y$ und $q = xy$, und zwar ist $(t - x)(t - y) = t^2 - pt + q$. Die Potenzsummen $s_k := x^k + y^k$ erfüllen eine zweistufige lineare Rekursionsformel. Wie sieht diese aus?

10) Vergiß (vorübergehend) die Herleitung der Sätze 1,2 und 3 und beweise sie direkt durch vollständige Induktion. Beweise ebenso Satz 4 durch vollständige Induktion.

11) Die FIBONACCI-Zahlen auf dem Taschenrechner:

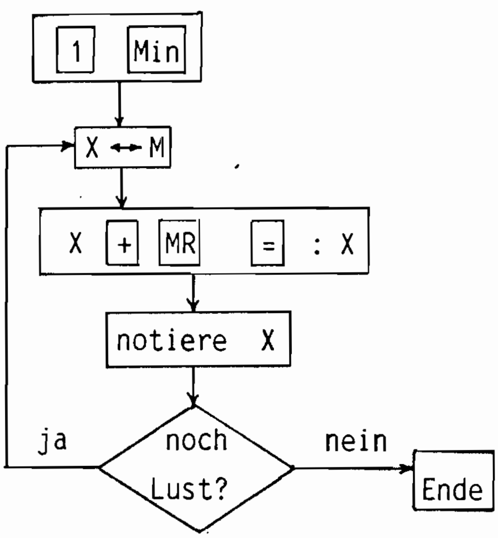
a) Der Taschenrechner besitze eine Anzeige X, einen Speicher M und (mindestens) folgende Tasten: $\boxed{1}$, $\boxed{+}$, $\boxed{=}$, außerdem:

$\boxed{\text{Min}}$ - Der Wert von X wird in M gespeichert, bleibt aber auch in X.

$\boxed{\text{MR}}$ - Der Wert von M wird nach X gebracht, bleibt aber auch in M.

$\boxed{X \leftrightarrow M}$ - Die Werte von M und X werden vertauscht.

Arbeite das folgende Flußdiagramm ab (auf dem Papier, wenn Du keinen solchen Rechner hast):



Die Tastenfolge ist also

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{X \leftrightarrow M}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$

Beweise die Vermutung, die sich aufdrängt.

b) Löse FIBONACCIs Aufgabe, d.h., bestimme F_{13}.

c) Prüfe nach, ob die Formel aus dem Korollar zu Satz 3 auf dem Taschenrechner F_{35} noch korrekt liefert. Falls ja: prüfe F_{39}.

12) a) Beweise die Formel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ durch Induktion.

b) Zeige: $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

c) Bestimme den ggT von F_n und F_{n-1} aus b) und mit dem euklidischen Algorithmus.

13) Finde die ersten vier Ziffern der 1000. FIBONACCI-Zahl, indem Du die Konstante c aus Satz 5 durch F_{10}/r^{10} ersetzt. Kann man bei Benutzung eines Taschenrechners oder Computers mit Hilfe der Sätze 3 und 5 weitere Ziffern absichern?

14) Sei $x = (x_n)$ die Folge mit $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$, $x_o = a_o$, $x_1 = a_1$, wobei a_o, a_1, p und q reell sind.

a) Die Nullstellen r und s des charakteristischen Polynoms seien reell und verschieden, $|r| > |s|$ und $a_1 \neq sa_o$. Zeige:

$$x \text{ divergiert} \Leftrightarrow r \leq -1 \text{ oder } r > 1,$$

$$x \text{ konvergiert} \Leftrightarrow -1 < r \leq 1.$$

Wann ist x Nullfolge? Was geschieht im Fall $a_1 = sa_o$?

b) Diskutiere analog, so gut es geht, die übrigen Fälle: r = s reell oder r, s nicht reell.

c) Beispiel: x_n entstehe durch fortwährende Mittelbildung

$x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$, oder allgemeiner: Bildung des gewichteten

Mittels $x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}$ mit $p + q = 1$. Konvergiert die Folge? Welches ist der Grenzwert?

15) Zusammenhang mit Differentialgleichungen: Löse die Differentialgleichung $f'' = pf' + qf$ mit $f(o) = a$, $f'(o) = b$ durch den Potenzreihenansatz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n$$

(daß die Lösung sich als Potenzreihe schreiben läßt, folgt aus der Theorie der Differentialgleichungen): Gewinne eine Rekursionsformel für die Koeffizienten und wende die Sätze 1 und 2 an. Welche bekannten Funktionen findest Du als Lösung?

16) Löse die Aufgaben 7 und 11 zum Vortrag "Stochastische Matrizen".

LITERATUR

Die Behandlung von linearen Rekursionsformeln mit Matrizen wird vorgeschlagen in

R. A. ROSENBAUM: An application of matrices to linear recursion relations. American Mathematical Monthly 66 (1959), 792-793;

J. L. BRENNER: Linear recurrence relations. American Mathematical Monthly 61 (1954), 171-173.

Auch in

ZDF, Projekt Fernstudium im Medienverbund (FIM), Sendung F LA 19,

wird das Eigenwertproblem (hier für symmetrische und hermitesche Matrizen) durch die FIBONACCI-Folge motiviert.

Alle in diesem Vortrag vorkommendenden Jahreszahlen deuten darauf hin, daß die Behandlung von Rekursionsformeln mindestens 100 Jahre älter ist als die Matrizenrechnung, die erst ab Mitte des 19. Jahrhunderts entwickelt und erst im 20. allgemein benützt wurde. Interessant ist hier auch ein Blick in die

Kapitel 13 und 17 von

L. EULER: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1983

(Original: Introductio in Analysin Infinitorum, Lausanne 1748),

wo die Rekursionsformeln mit Hilfe der erzeugenden Funktion R(t) aus §5 behandelt werden. Eine katalogartige Zusammenstellung von Arbeiten über lineare Rekursionsfolgen steht in Kapitel 17 von:

L. E. DICKSON: History of the Theory of Numbers. Vol. I. Carnegie Institute, Washington 1919; Reprint: Chelsea, New York 1960.

Lineare Rekursionsformeln mit Anwendungen in der Zahlentheorie werden ausführlich behandelt im zweiten Kapitel von:

P. BACHMANN: Niedere Zahlentheorie II. Teubner, Leipzig 1910.

Im Satz 7.7 von

F.-J. FRITZ/ B. HUPPERT/ W. WILLEMS: Stochastische Matrizen. Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1979,

wird die zweistufige lineare Rekursion matrizenfrei behandelt; das Buch enthält einige weitere Anwendungen auf stochastische Matrizen. Als Einstieg in die Theorie der FIBONACCI-Zahlen gut geeignet ist das Kapitel 13 von

D. BURTON: Elementary Number Theory, Allyn and Bacon, Boston 1976,

ebenso wie Kapitel 10 und Anhang 1 von

R. STOWASSER/ B. MOHRY: Rekursive Verfahren, Materialien für die Sekundarstufe II, Mathematik, Schroedel, Hannover 1978,

wo auch einige allgemeine Überlegungen über lineare Rekursionsformeln zu finden sind. Anregungen zur Beschäftigung mit der FIBONACCI-Folge mit Hilfe des Computers enthält:

A. ENGEL: Elementarmathematik von algorithmischen Standpunkt. Klett Studienbücher Mathematik, Stuttgart 1977 (S. 35-39).

Für genauere Abschätzungen der Schrittzahl im euklidischen Algorithmus siehe:

J. D. DIXON: A simple estimate for the number of steps in the Euclidean algorithm. American Mathematical Monthly 78 (1971), 374-376.