S P I E G E L U N G E N
I N B E S C H R Ä N K T E N S Y M M E T R I S C H E N
A U S N A H M E G E B I E T E N

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johannes-Gutenberg-Universität
in Mainz

von
Klaus Pommerening
aus Grönwohld

Mainz 1972

Dekan:	Prof.Dr.H.Risler
1.Berichterstatter:	Prof.Dr.E.Gottschling
2.Berichterstatter:	
Tag der mündlichen Prüfung:	

INHALTSVERZEICHNIS

BEZEICHNUNGEN UND KONVENTIONEN

$\square$ Ende eines Beweises

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_m = \{m, m+1, m+2, \dots\}$

$\subseteq, \subset$ Teilmenge bzw. echte Teilmenge

1_M identische Abbildung auf der Menge M

$f[M]$, $f^{-1}[N]$ Bild bzw. Urbild einer Menge M bzw. N unter der Abbildung f

$\mathfrak{M}_{p,q}(K)$ Menge der (p,q)-Matrizen über dem Körper K

1_r (r,r)-Einheitsmatrix

X^t zur Matrix X transponierte Matrix

tr X Spur der Matrix oder linearer Abbildung X

$X > 0$ Die hermitesche Matrix oder Abbildung X ist positiv-definit

$Z_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ zyklische Gruppe der Ordnung m

$U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$ Rand des komplexen Einheitskreises

M^-, M^o abgeschlossene Hülle bzw. offener Kern der Teilmenge M eines topologischen Raumes

Bei einer assoziativen Algebra A mit 1 über einem Körper K wird stets identifiziert $K \subseteq A$. Bei Jordan-Algebren heißt das Einselement stets e. Lie-Gruppen werden mit großen lateinischen Buchstaben G, ... , $GL(n,\mathbb{C})$, $SO(n,\mathbb{R})$, ... , die zugehörigen Lie-Algebren (meistens) mit den entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{g}$, ... , $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$, ... bezeichnet.

Alle weiteren Bezeichnungen und Konventionen sind Standard.

0. EINLEITUNG

Diese Arbeit ist die noch fehlende Ergänzung zu [3]. In [3] hat E.Gottschling das Problem der Bestimmung aller Spiegelungen in beschränkten symmetrischen Gebieten vollständig gelöst bis auf die Fälle der beiden irreduziblen Ausnahmegebiete der Dimension 16 und 27. Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist:

> Die beiden irreduziblen beschränkten symmetrischen Ausnahmegebiete besitzen keine Spiegelungen.

In Kapitel I wird das 16-dimensionale Gebiet mit Hilfe der kanonischen Realisierung nach M.Ise behandelt. Haupthilfsmittel ist dabei ein Satz von M.Ise und T.Yokonuma über die Automorphismengruppe der kanonischen Realisierung eines beschränkten symmetrischen Gebiets.

Kapitel II gibt eine allgemeine Theorie für die Spiegelungen der beschränkten symmetrischen Gebiete vom Kegel-Typ (die analytisch isomorph zu Siegelschen Halbräumen 1.Art sind und zu denen das 27-dimensionale Ausnahmegebiet gehört) mit Hilfe des von U.Hirzebruch gefundenen Zusammenhangs dieser Gebiete mit den formal-reellen Jordan-Algebren. Das Kapitel ist in sich abgeschlossen und ergibt von [3] unabhängige Beweise der dortigen Ergebnisse, eingeschränkt auf die hier betrachteten Gebiete.

Ohne weiteren Verweis werden in dieser Arbeit die Anfangsgründe der Funktionentheorie in mehreren Veränderlichen und der Theorie der Lie-Gruppen benützt. Alles darüber Hinausgehende ist mit Literaturverweisen versehen. Die wichtigsten Tatsachen über beschränkte symmetrische Gebiete, Spiegelungen und Jordan-Algebren werden in den folgenden Paragraphen dieser Einleitung zusammengestellt.

Ich danke Herrn Professor Gottschling für die Anregung zu dieser Arbeit und für manchen wertvollen Rat.

§1. BESCHRÄNKTE SYMMETRISCHE GEBIETE

Für einen (komplex-) analytischen Raum M sei $\Omega(M)$ stets die Gruppe der analytischen Automorphismen von M.

DEFINITION 1: (i) Ein beschränktes Gebiet M in einem endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum $V \neq 0$ heißt symmetrisch, wenn es zu jedem Punkt $z \in M$ eine Abbildung $\omega \in \Omega(M)$ mit $\omega^2 = 1_M$ gibt, die z als isolierten Fixpunkt hat.

(ii) Ein Gebiet $M \subseteq V$ heißt reduzibel, wenn es analytisch isomorph zu einem cartesischen Produkt $M_1 \times M_2$ zweier Gebiete der Dimension ≥ 1 ist; andernfalls heißt M irreduzibel.

ANMERKUNG: Ein beschränktes symmetrisches Gebiet ist stets homogen, d.h., $\Omega(M)$ operiert transitiv auf M ([4], S.170).

Jedes beschränkte symmetrische Gebiet M ist analytisch isomorph zu einem Produkt irreduzibler beschränkter symmetrischer Gebiete,

$$M \cong M_1 \times \ldots \times M_s,$$

wobei die M_i bis auf die Reihenfolge und bis auf analytische Isomorphie eindeutig bestimmt sind.

Ist M ein Gebiet mit $0 \in M$, so bezeichne $\Sigma(M)$ stets die Stabilitätsgruppe von 0 in $\Omega(M)$, also

$$\Sigma(M) := \{\omega \in \Omega(M) \mid \omega(0) = 0\} .$$

DEFINITION 2: Wenn für ein beschränktes symmetrisches Gebiet $M \subseteq V$ gilt:

(i) $0 \in M$,

(ii) M ist gleich (nicht nur analytisch isomorph) einem cartesischen Produkt irreduzibler beschränkter symmetrischer Gebiete,

(iii) $\Omega(M)$ enthält alle Abbildungen $z \longmapsto \lambda z$ mit $\lambda \in U(1)$ (d.h., M ist „kreisförmig"),

(iv) alle Abbildungen in $\Sigma(M)$ sind linear (d.h., $\Sigma(M) \subseteq GL(V)$),

so soll M ein Gebiet in Normalform genannt werden.

Jedes beschränkte symmetrische Gebiet läßt sich durch einen analytischen Isomorphismus in Normalform bringen ([3], S.703/704).

Die irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebiete sind von E.Cartan vollständig klassifiziert worden. Die folgende Aufzählung gibt von jedem Isomorphietyp dieser Gebiete einen Vertreter in Normalform an, nämlich die „kanonische Realisierung" im Sinne von [9], die für die Typen I - IV auf E.Cartan und C.L.Siegel zurückgeht (vgl. [3], S.696-698).

I. Für beliebige $p, q \in \mathbb{N}_1$, $p \leq q$, ist

$$M_{p,q} := \{Z \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \mid 1_q - Z^t\bar{Z} > 0\}$$

ein irreduzibles beschränktes symmetrisches Gebiet der Dimension pq.

II. Sei $r \in \mathbb{N}_5$. Dann ist

$$T_r := \{ Z \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{C}) \mid Z^t = -Z,\ 1_r - Z^t\bar{Z} > 0 \}$$

ein irreduzibles beschränktes symmetrisches Gebiet der Dimension $\frac{1}{2} \cdot r \cdot (r-1)$.

III. Für $r \in \mathbb{N}_2$ ist

$$S_r := \{ Z \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{C}) \mid Z^t = Z,\ 1_r - Z^t\bar{Z} > 0 \}$$

ein irreduzibles beschränktes symmetrisches Gebiet der Dimension $\frac{1}{2} \cdot r \cdot (r+1)$.

IV. Für $n \in \mathbb{N}_3$ ist

$$L_n := \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z^t z| < 1,\ 2z^t\bar{z} < 1 + |z^t z|^2 \}$$

ein irreduzibles beschränktes symmetrisches Gebiet der Dimension n. Dabei ist $L_3 \cong S_2$ und $L_4 \cong M_{2,2}$ ([4], S. 352; in der dortigen Bezeichnungsweise ist L_n = BD I (p=n, q=2), S_2 = C I (n=2), $M_{2,2}$= A III(p=q=2)).

V. und VI. Die „kanonischen" Modelle für das 16- bzw. 27-dimensionale Ausnahmegebiet, R_{16} bzw. R_{27}, sind erst kürzlich von M.Ise gefunden worden (s. etwa [9]). Da wir ihre explizite Beschreibung nicht benötigen und diese doch recht kompliziert ist, wird sie hier nicht angegeben.

Bis auf die unter IV. angegebenen Isomorphien sind die aufgezählten Gebiete paarweise nicht analytisch isomorph.

Die hiervon (zum Teil) verschiedene Realisierung der beschränkten symmetrischen Gebiete vom Kegel-Typ nach U. Hirzebruch mit Hilfe von Jordan-Algebren wird in Kapitel II benötigt und dort auch beschrieben.

Eine explizite Beschreibung der Automorphismengruppen der Typen I - IV (in der kanonischen Realisierung) findet man in [3] und ferner das Ergebnis:

(A) Ist M ein beschränktes symmetrisches Gebiet,

$$M \cong M_1^{k_1} \times \ldots \times M_s^{k_s}$$

seine Zerlegung in irreduzible Gebiete mit $k_i \geq 1$ und $M_i \ncong M_j$ für $i \neq j$, $S(k_i)$ die volle symmetrische Gruppe der Permutationen der k_i isomorphen Faktoren M_i als Untergruppe von $\Omega(M)$, so gilt:

Das direkte Produkt der Gruppen $S(k_i)$,

$$S' := S(k_1) \times \ldots \times S(k_s),$$

ist Untergruppe, das direkte Produkt

$$\Omega' := \Omega(M_1)^{k_1} \times \ldots \times \Omega(M_s)^{k_s}$$

(mit der naheliegenden Identifikation) Normalteiler von $\Omega(M)$, und $\Omega(M)$ ist das semidirekte Produkt von Ω' und S'.

§2. SPIEGELUNGEN IN KOMPLEXEN MANNIGFALTIGKEITEN

DEFINITION 3: Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit, $z \in M$, $\omega \in \Omega(M)$. ω heißt Spiegelung in z, wenn gilt:

(i) $\omega^m = 1_M$ für ein $m \in \mathbb{N}_1$;

(ii) $\omega(z) = z$;

(iii) die Fixpunktmenge von ω (die eine analytische Teilmenge von M ist) hat in z die (komplexe) Codimension 1.

BEMERKUNGEN: 1.) (iii) ist äquivalent zu: Die (totale) Ableitung $D\omega(z)$ von ω in z, die ein linearer Automorphismus des Tangentialraums von M in z ist, hat genau einen Eigenwert $\neq 1$. Wegen (i) ist $D\omega(z)$ sogar diagonalisierbar, und der Eigenwert $\neq 1$ ist eine m-te Einheitswurzel.

Ist M ein Gebiet eines komplexen Vektorraums V, so trifft das gleiche auf den Automorphismus von V zu mit dem $D\omega(z)$ kanonisch identifiziert wird.

2.) Ist $\omega\in\Omega(M)$ Spiegelung in $z\in M$, $\omega_0\in\Omega(M)$ beliebig, so ist $\omega_0\circ\omega\circ\omega_0^{-1}$ Spiegelung in $\omega_0(z)$. Insbesondere genügt es, Spiegelungen bis auf Konjugation in $\Omega(M)$ zu bestimmen. Gibt es Spiegelungen und hat man diese nur bis auf Konjugation bestimmt, so gehört zur vollständigen Kenntnis aller Spiegelungen von M auch die vollständige Kenntnis der Automorphismengruppe von M.

3.) Ist M ein beschränktes symmetrisches Gebiet in Normalform, so genügt es nach 2. wegen der Transitivität von $\Omega(M)$ sogar, die Spiegelungen (bis auf Konjugation) in der linearen Gruppe $\Sigma(M)$ zu bestimmen.

In [3], S.693/694, ist ausführlich beschrieben, welche Bedeutung die Spiegelungen einer komplexen Mannigfaltigkeit haben: Der Quotient der Mannigfaltigkeit M nach einer diskontinuierlichen Gruppe von Automorphismen ist ein komplexer Raum mit gewissen Eigenschaften. Die Kenntnis der Spiegelungen von M gestattet eine genauere Untersuchung der Automorphismengruppe dieses komplexen Raumes und eine Beschreibung seiner Singularitäten. Damit ist das Problem motiviert, die Spiegelungen komplexer Mannigfaltigkeiten zu bestimmen. Gottschling selbst beweist über die Spiegelungen der beschränkten symmetrischen Gebiete die folgenden Sätze:

(B) Sei M ein beschränktes symmetrisches Gebiet, zerlegt wie in (A). Dann gilt:

Ist $\omega\in\Omega(M)$ eine Spiegelung mit $\omega\in\Omega'$, so muß ω auf allen Faktoren bis auf einen die Identität und auf diesem einen Faktor eine Spiegelung sein.

Ist $\omega \in \Omega(M)$ eine Soiegelung mit $\omega \notin \Omega'$, so müssen mindestens zwei Faktoren die Dimension 1 haben (und somit analytisch isomorph zur Einheitskreisscheibe $M_{1,1} \subseteq \mathbb{C}$ sein), etwa $\dim M_1 = 1$, $k_1 \geq 2$. ω ist dann konjugiert zu der Abbildung

$$(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)^t \longmapsto (z_2, z_1, z_3, \ldots, z_n)^t$$

von M, wobei z_1 und z_2 über M_1 laufen. (Diese Abbildung ist trivialerweise Spiegelung in $\Omega(M)$.)

(C) Es gibt keine Spiegelungen in den Gebieten

$M_{p,q}$ für $3 \leq p \leq q$ oder $2 = p < q$,

T_r für $r \geq 5$, S_r für $r \geq 3$.

Es gibt Spiegelungen in den Gebieten $M_{2,2}$, $M_{1,q}$ für alle $q \in \mathbb{N}_1$, S_2 und L_n für alle $n \in \mathbb{N}_3$.

Jede Spiegelung in $M_{2,2}$ ist konjugiert zu der Abbildung

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} .$$

Jede Spiegelung in $M_{1,q}$ ist konjugiert zu einer der Abbildungen

$$(z_1, z_2, \ldots, z_q) \longmapsto (\lambda z_1, z_2, \ldots, z_q)$$

mit einer beliebigen Einheitswurzel $\lambda \neq 1$.

Jede Spiegelung in S_2 ist konjugiert zu der Abbildung

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_{11} & -z_{12} \\ -z_{12} & z_{22} \end{pmatrix} .$$

Jede Spiegelung in L_n, $n \geq 3$, ist konjugiert zu

$$(z_1, z_2, \ldots , z_n)^t \longmapsto (-z_1, z_2, \ldots , z_n)^t.$$

(Die angegebenen Abbildungen sind trivialerweise Spiegelungen in $\Omega(M)$.)

ANMERKUNG: Die Aussage für L_3 und L_4 folgt trivialerweise aus der Isomorphie $L_3 \cong S_2$ und $L_4 \cong M_{2,2}$ und daraus, daß es in diesen Gebieten jeweils nur eine Konjugationsklasse von Spiegelungen gibt. Daß die Gebiete L_3 und L_4 im Gegensatz zu [3] hier überhaupt aufgeführt werden, liegt daran, daß sie sich aus technischen Gründen besser in die Theorie von Kapitel II fügen, s.S.44.

Mit diesen beiden Sätzen sind die Spiegelungen aller beschränkten symmetrischen Gebiete bekannt, soweit sie kein Ausnahmegebiet als Faktor enthalten. Die Ausnahmegebiete R_{16} und R_{27} werden in [3] nicht behandelt.

§3. JORDAN-ALGEBREN

Obwohl viele der folgenden Aussagen auch allgemeiner gelten, beschränken wir uns von vornherein auf $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ als Grundkörper. Außerdem werden nur kommutative Jordan-Algebren betrachtet.

Sei also A stets eine (kommutative) Jordan-Algebra über K. $L(x) \in \mathrm{End}_K(A)$ sei die Multiplikation mit $x \in A$, also $L(x)y := xy$. $L(x)$ ist im allgemeinen nur linear, kein Algebren-Homomorphismus. Weiter sei

$$P: A \longrightarrow \mathrm{End}_K(A), \quad P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2),$$

die quadratische Darstellung.

Die Jordan-Algebra A heißt einfach, wenn sie keine nichttrivialen Ideale hat. A heißt halbeinfach, wenn das (geeignet zu definierende) Radikal von A Null ist ([1], S. 35). Jede halbeinfache Jordan-Algebra ist in eine direkte Summe von einfachen Idealen zerlegbar ([1], S.55).

Eine Jordan-Algebra über $\mathbb{R}$ heißt formal-reell, wenn

$$x^2 + y^2 = 0 \implies x = y = 0.$$

Eine formal-reelle Jordan-Algebra ist stets halbeinfach und hat ein Einselement e ([1], S.319). Jede halbeinfache komplexe Jordan-Algebra ist Komplexifizierung einer formal-reellen Jordan-Algebra ([1], S.331) und hat somit auch ein Einselement e. Die einfachen komplexen Jordan-Algebren sind dabei gerade die Komplexifizierungen der einfachen formal-reellen Jordan-Algebren.

Von jetzt an sind alle betrachteten Jordan-Algebren formal-reell oder halbeinfach komplex.

Für ein Idempotent $c \in A$ (o.B.d.A. stets $c \neq 0, e$) hat $L(c)$ höchstens die Eigenwerte $0, \frac{1}{2}, 1$. $L(c)$ ist diagonalisierbar, und die Zerlegung in die zugehörigen Eigenräume,

$$A = A_0(c) \oplus A_{1/2}(c) \oplus A_1(c), \quad A_\nu(c) := \{x \in A \mid cx = \nu x\} \quad \text{für } \nu = 0, \tfrac{1}{2}, 1,$$

heißt die Peirce-Zerlegung von A bezüglich c ([1], S. 47-50). $A_0(c)$ und $A_1(c)$ sind Unteralgebren, die sich gegenseitig annullieren, $A_{1/2}(c)$ ist keine Unteralgebra, falls es $\neq 0$ ist. Ist $A_{1/2}(c) = 0$, so sind $A_0(c)$ und $A_1(c)$ sogar Ideale, und die Peirce-Zerlegung gibt eine direkte Zerlegung in diese. Insbesondere muß für einfaches A der Summand $A_{1/2}(c) \neq 0$ sein. Ist c ein primitives Idempotent, so ist $A_1(c) = Kc$ ([1]; S.156, Satz 5.12; S.320, Lemma 3.3; S.119, Satz 7.4; S.316, Abschnitt 1 von XI.§2).

Für ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten oder vollständiges Orthonormalsystem $\{c_1, \dots , c_s\}$ (vollständig heißt dabei: $c_1 + \dots + c_s = e$) gibt es ebenfalls eine Peirce-Zerlegung

$$A = \bigoplus_{i \leq j} A_{ij} ,$$

wobei $A_{ii} = A_1(c_i)$ und $A_{ij} = A_{1/2}(c_i) \cap A_{1/2}(c_j)$ für $i \neq j$. Die zu dieser direkten Zerlegung gehörigen Projektionen sind

$$C_{ii} := P(c_i) \quad \text{und} \quad C_{ij} := 4 \cdot L(c_i) \circ L(c_j) \text{ für } i \neq j$$

([1], S.239). Ist A einfach und sind alle c_i primitiv, so sind alle $A_{ij} \neq 0$ ([1], S.244, Satz 3.4).

Für jedes $x \in A$ ist die von x erzeugte Unteralgebra $K[x]$ eine kommutative assoziative Algebra mit e als Einselement ([1], S.141), hat also nur endlich viele primitive Idempotente $c_1, \dots , c_s$, die paarweise orthogonal sind und ein vollständiges Orthonormalsystem von A bilden (in A brauchen sie natürlich nicht primitiv zu sein). x ist dann eindeutig darstellbar als

$$x = \xi_1 c_1 + \dots + \xi_s c_s,$$

wobei $\xi_1, \dots, \xi_s$ gerade die <u>verschiedenen</u> Eigenwerte von $L(x)|_{K[x]}$ sind ([1], S.22, Satz 4.2). Diese Darstellung heißt die Minimalzerlegung von x.

Da A eine formal-reelle oder halbeinfache komplexe Jordan-Algebra ist, hat jedes vollständige Orthogonalsystem von primitiven Idempotenten dieselbe Länge r; r heißt der Grad dieser Jordan-Algebra ([1], S.120, S.328).

Für $u \in A$ ist $P(u)$ genau dann ein Algebra-Automorphismus von A, wenn $u^2 = e$ ([1], S. 157/158). Ist A einfach, und sind $\{c_1, \dots, c_r\}$, $\{d_1, \dots, d_r\}$ vollständige Orthonormalsysteme, so gibt es ein Produkt W von Automorphismen $P(u)$ mit $u^2 = e$, so daß $Wc_i = d_i$ für $i = 1, \ldots, r$ ([1], S.273, und [7], S.343 und S.344).

Die Strukturgruppe $\Gamma(A)$ von A ist die Menge der $W \in GL(A)$, für die es ein $W^{\#} \in GL(A)$ gibt mit

$$P(Wx) = W \circ P(x) \circ W^{\#} \qquad \text{für alle } x \in A.$$

Ist W Algebra-Automorphismus von A (das bedeutet insbesondere $We = e$), so ist $W \in \Gamma(A)$ mit $W^{\#} = W^{-1}$; für invertierbares $y \in A$ ist $P(y) \in \Gamma(A)$ mit $P(y)^{\#} = P(y)$ ([1], S.156, S. 90/91).

§4. DIE EINFACHEN FORMAL-REELLEN UND KOMPLEXEN JORDAN-ALGEBREN

Sei $\mathbb{H}$ die nicht-kommutative $\mathbb{R}$-Algebra der Quaternionen, $\mathbb{O}$ die (weder kommutative noch assoziative) $\mathbb{R}$-Algebra der Oktonionen oder Cayley-Zahlen über $\mathbb{R}$, $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ und $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$ ihre Komplexifizierungen.

Sei $r \geq 3$ und

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & M_r^+(K) \\[2ex] \text{b)} & S_r(K) \\[2ex] \text{c)} & H_r(C) \end{array}\right\} \text{ die } K\text{-Algebra der } \left\{\begin{array}{l} \text{quadratischen } r\text{-reihigen Matrizen über } K, \\[1ex] \text{symmetrischen quadratischen } r\text{-reihigen Matrizen über } K, \\[1ex] \text{hermiteschen quadratischen } r\text{-reihigen Matrizen über der } K\text{-Algebra} \\ C \text{ mit der kanonischen Involution } x \mapsto \bar{x}, \end{array}\right.$$

wobei für $K = \mathbb{R}$: $C = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$, für $K = \mathbb{C}$: $C = \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ oder $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$ einzusetzen ist, jeweils mit der Multiplikation

$$xy := \frac{1}{2}\cdot(x \circ y + y \circ x),$$

wobei $\circ$ das übliche Matrizenprodukt bezeichnet.

$S_r(\mathbb{R})$, $H_r(\mathbb{C})$ und $H_r(\mathbb{H})$ sind einfache formal-reelle Jordan-Algebren vom Grad r, $H_3(\mathbb{O})$ ist eine solche vom Grad 3. $M_r^+(\mathbb{C})$, $S_r(\mathbb{C})$ und $H_r(\mathbb{H}^{\mathbb{C}})$ sind einfache komplexe Jordan-Algebren vom Grad r, $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$ eine solche vom Grad 3. Das Einselement ist jeweils die Einheitsmatrix. ([1], S.331 und S.309).

Ferner definieren wir auf K^n für $n \geq 3$ noch folgendermaßen die Algebra $[K^n, \mu, e_1]$:

Sei $\mu: K^n \times K^n \longrightarrow K$ die nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform

$$\mu((x_1, x_2, \ldots, x_n)^t, (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t) = x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ny_n$$

und $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$. Dann wird die Multiplikation in $[K^n, \mu, e_1]$ durch

$$xy := \mu(x,e_1)\cdot y + \mu(y,e_1)\cdot x - \mu(x,y)\cdot e_1,$$

also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \\ x_1y_2 + y_1x_2 \\ \vdots \\ x_1y_n + y_1x_n \end{pmatrix} \qquad \circledast$$

erklärt. $[K^n, \mu, e_1]$ ist eine K-Jordan-Algebra mit dem Einselement e_1. $[\mathbb{R}^n, \mu, e_1]$ ist einfach formal-reell vom Grad 2, $[\mathbb{C}^n, \mu, e_1]$ einfach vom Grad 2. ([1], S.331 und S.309.)

LEMMA 1: (i) Die Abbildungen

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^t \longmapsto (x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_n)^t$$

und $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \longmapsto (x_1, -x_2, \ldots, -x_n)^t$

sind Algebra-Automorphismen von $[K^n, \mu, e_1]$.

(ii) Die Elemente

$$c_1 := (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, \ldots, 0)^t \text{ und } c_2 := (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, \ldots, 0)^t$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $A = [K^n, \mu, e_1]$. Ist $A = A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{13}$ die Peirce-Zerlegung bezüglich $\{c_1, c_2\}$, so ist $A_{11} = Kc_1$, $A_{22} = Kc_2$,

$$A_{12} = \left\{ (0, 0, x_3, \ldots, x_n)^t \,\middle|\, x_3, \ldots, x_n \in K \right\},$$

und die beiden Automorphismen W aus (i) werden gerade durch

$$Wc_1 = c_2, \; Wc_2 = c_1, \quad W|_{A_{12}} = \pm 1_{A_{12}}$$

beschrieben.

Beweis: trivial mit $\circledast$ □

BEMERKUNG: Der zweite Automorphismus aus (i) ist die kanonische Involution $x \longmapsto \bar{x}$ von $[K^n, \mu, e_1]$ ([1], S.193).

Mit den bisher aufgezählten Jordan-Algebren gilt:

SATZ 1 (Klassifikation der einfachen formal-reellen Jordan-Algebren): Jede einfache formal-reelle Jordan-Algebra vom Grad r ist isomorph zu einer der Algebren

(A) $\mathbb{R}$ (falls $r = 1$),

(B) $[\mathbb{R}^n, \mu, e_1]$ mit $n \geq 3$ (falls $r = 2$),

(C) α) $S_r(\mathbb{R})$, β) $H_r(\mathbb{C})$, γ) $H_r(\mathbb{H})$ (falls $r \geq 3$),

(D) $H_3(\mathbb{O})$ (falls $r = 3$).

([1], S.331)

<u>SATZ 2</u> (Klassifikation der einfachen komplexen Jordan-Algebren): Jede einfache komplexe Jordan-Algebra vom Grad r ist isomorph zu einer der Algebren

(A) $\mathbb{C}$ (falls $r = 1$),

(B) $[\mathbb{C}^n, \mu, e_1]$ mit $n \geq 3$ (falls $r = 2$),

(C) α) $S_r(\mathbb{C})$, β) $M_r^+(\mathbb{C})$, γ) $H_r(\mathbb{H}^{\mathbb{C}})$ (falls $r \geq 3$),

(D) $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$ (falls $r = 3$).

([1], S.309)

<u>KOROLLAR</u>: Die in Satz 2 unter A, B, $C\alpha$, $C\gamma$ und D aufgeführten einfachen komplexen Jordan-Algebren sind die Komplexifizierungen der unter dem gleichen Buchstaben in Satz 1 aufgeführten einfachen formal-reellen Jordan-Algebren. Ferner ist $M_r^+(\mathbb{C})$ isomorph zur Komplexifizierung der formal-reellen Jordan-Algebra $H_r(\mathbb{C})$.

([1], S.331)

Noch einige Bemerkungen zur „Ausnahme-Algebra" $H_3(C)$ über $K = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, wobei $C = \mathbb{O}$ bzw. $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$:

Das Element $\begin{pmatrix} \xi & w & \bar{v} \\ \bar{w} & \eta & u \\ v & \bar{u} & \zeta \end{pmatrix}$ wird in der Form $(\xi,\eta,\zeta;\ u,v,w)$ geschrieben (vgl. [1], S.227; dort ist auch die Multiplikationsregel für diese Schreibweise angegeben). Durch

$$\mathrm{tr}(\xi,\eta,\zeta;\ u,v,w) := \xi + \eta + \zeta$$

ist eine assoziative Linearform $\mathrm{tr}\colon H_3(C) \longrightarrow K$ gegeben ([1], S.225).

Alle noch in dieser Arbeit vorkommenden Idempotente von Jordan-Algebren sollen $\neq e$ und $\neq 0$ sein.

KAPITEL I. DIE SPIEGELUNGSFREIHEIT DES 16-DIMENSIONALEN AUSNAHMEGEBIETS

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, daß das Gebiet R_{16} keine Spiegelungen besitzt. Dabei gehen wir wie folgt vor:

Die benötigten Ergebnisse von [9] werden in §2 aufgeführt; daraus wird in Anlehnung an den in [10] vorgezeichneten Weg in §3 die Stabilitätsgruppe $\Sigma(R_{16})$ berechnet.

Damit ist die Bestimmung der Spiegelungen auf die Untersuchung der Halbspin-Darstellungen einer Spin-Gruppe zurückgeführt. Alle zu dieser Untersuchung benötigten Hilfsmittel sind in dem Buch [2] von Chevalley zu finden; sie werden in §1 zusammengestellt.

Der §4 enthält dann die Ausrechnung der Spiegelungsfreiheit.

§1. SPIN-GRUPPEN UND SPIN-DARSTELLUNGEN

Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einer nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform σ. Die zugehörige Clifford-Algebra $C(\sigma)$ trägt eine natürliche Z_2-Graduierung $C(\sigma) = C^+(\sigma) \oplus C^-(\sigma)$; die Unteralgebra $C^+(\sigma)$ heißt die gerade oder zweite Clifford-Algebra ([2], S.37).

V ist auf natürliche Weise in $C(\sigma)$, und zwar in $C^-(\sigma)$, eingebettet und erzeugt $C(\sigma)$ als K-Algebra mit 1: Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine K-Basis von V; für

$M = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < \ldots < i_m$, sei $x_M := x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_m} \in C(\mathfrak{S})$, insbesondere $x_\emptyset = 1$. Dann ist $\{x_M \mid M \subseteq \{1, \ldots, n\}\}$ eine K-Basis von $C(\mathfrak{S})$, insbesondere ist $\dim_K C(\mathfrak{S}) = 2^n$ ([2], S. 38-40). Die x_M mit $m \equiv 0 \pmod 2$ bilden eine K-Basis von $C^+(\mathfrak{S})$, die mit $m \equiv 1 \pmod 2$ eine K-Basis von $C^-(\mathfrak{S})$ ([2], S. 41/42).

Für eine Einheit $s \in C(\mathfrak{S})$ sei $\chi(s)$ der innere Automorphismus $x \longmapsto sxs^{-1}$ von $C(\mathfrak{S})$. Die Clifford-Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ ist die Menge der Einheiten $s \in C(\mathfrak{S})$ mit $\chi(s)[V] \subseteq V$. χ induziert somit die „Vektor-Darstellung"

$$\chi: \Gamma(\mathfrak{S}) \longrightarrow O(\mathfrak{S}), \quad s \longmapsto \chi(s)|_V,$$

in die orthogonale Gruppe von V bezüglich $\mathfrak{S}$ ([2], S.49). Die gerade oder spezielle Clifford-Gruppe ist $\Gamma^+(\mathfrak{S}) := \Gamma(\mathfrak{S}) \cap C^+(\mathfrak{S})$; es ist $\chi[\Gamma^+(\mathfrak{S})] = SO(\mathfrak{S})$ ([2], S.51).

$C(\mathfrak{S})$ trägt den „Haupt-Antiautomorphismus" α mit $\alpha|_V = 1_V$ und $\alpha(y_1 \ldots y_m) = y_m \ldots y_1$ für $y_1, \ldots, y_m \in V$ ([2], S.38). Für $s \in \Gamma^+(\mathfrak{S})$ ist $\alpha(s) \cdot s \in K^\times \subseteq C(\mathfrak{S})$; wir erhalten so den „Norm-Homomorphismus"

$$N: \Gamma^+(\mathfrak{S}) \longrightarrow K^\times, \quad s \longmapsto \alpha(s) \cdot s$$

([2], S.52; dort λ statt N). Es ist $\mathrm{Spin}(\mathfrak{S}) := \ker N$ die Spin-Gruppe von $\mathfrak{S}$ (in [2] heißt sie reduzierte Clifford-Gruppe Γ_0^+).

Ist nun n gerade, so gilt der Struktursatz:

$C(\mathfrak{S})$ ist eine zentral-einfache K-Algebra.

([2], S.42) Damit besitzt $C(\mathfrak{S})$ (bis auf Äquivalenz) genau eine irreduzible Darstellung

$$\rho: C(\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathrm{End}_K S$$

mit einem (endlich-dimensionalen) K-Vektorraum S.

ρ heißt die Spin-Darstellung von $C(\mathfrak{S})$. Auch die Einschränkungen von ρ auf $C^+(\mathfrak{S})$, $\Gamma(\mathfrak{S})$, $\Gamma^+(\mathfrak{S})$ und $\mathrm{Spin}(\mathfrak{S})$ heißen Spin-Darstellungen.

Hat $\mathfrak{S}$ weiter den maximalen Index $r = \frac{n}{2}$, so gilt zusätzlich:

> $C^+(\mathfrak{S})$ ist die direkte Summe zweier einfacher Ideale, die Spin-Darstellung ρ zerfällt auf $C^+(\mathfrak{S})$ in zwei nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen
>
> $$\rho_i : C^+(\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathrm{End}_K S_i, \quad i = 1, 2, \qquad S_1 \oplus S_2 = S$$

([2], S.44, S.56, S.70/71). ρ_1 und ρ_2 heißen die Halbspin-Darstellungen von $C^+(\mathfrak{S})$; ihre Einschränkungen auf $\Gamma^+(\mathfrak{S})$ und $\mathrm{Spin}(\mathfrak{S})$ heißen ebenfalls Halbspin-Darstellungen.

Ist noch spezieller $r \equiv 1 \pmod 2$, so sind die beiden Halbspin-Darstellungen von $\mathrm{Spin}(\mathfrak{S})$ zueinander kontragredient ([2], S. 77-79; die Aussage folgt sofort aus dem Verhalten der bilinearen Invarianten β nach III.2.1 und III.2.3; s.a.S.22/23). Weiter gilt:

<u>SATZ 3</u>: (i) Die Darstellung

$$\rho \otimes \rho : \mathrm{Spin}(\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathrm{End}_K(S \otimes S)$$

ist äquivalent zu $\chi : \mathrm{Spin}(\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, C(\mathfrak{S})$.

(ii) Werden $S \otimes S$ und $C(\mathfrak{S})$ nach (i) identifiziert, so gilt für $r \equiv 1 \pmod 2$

$$C^+(\mathfrak{S}) = (S_1 \otimes S_2) \oplus (S_2 \otimes S_1),$$
$$C^-(\mathfrak{S}) = (S_1 \otimes S_1) \oplus (S_2 \otimes S_2).$$

(zu (i): [2], S.84 - (i) gilt auch für gerades r; zu (ii): [2], S.95 und S.91)

Ist $\tilde{K}$ ein Oberkörper von K, $\tilde{V} := V \otimes_K \tilde{K}$, $\tilde{\sigma}$ die Fortsetzung von σ auf $\tilde{V}$, so ist

$$C(\sigma) \subseteq C(\tilde{\sigma}), \quad \Gamma(\sigma) \subseteq \Gamma(\tilde{\sigma}), \quad \mathrm{Spin}(\sigma) \subseteq \mathrm{Spin}(\tilde{\sigma}),$$

und für die Vektor-Darstellungen $\chi: \Gamma(\sigma) \longrightarrow O(\sigma)$ und $\tilde{\chi}: \Gamma(\tilde{\sigma}) \longrightarrow O(\tilde{\sigma})$ gilt

$$\chi(s) = \tilde{\chi}(s)\big|_V \qquad \text{für alle} \quad s \in \Gamma(\sigma)$$

([2], S.60/61).

Ist $V = K^n$, σ durch

$$\sigma((\xi_1, \ldots, \xi_n)^t, (\eta_1, \ldots, \eta_n)^t) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$$

definiert, so bezeichnet man die Gruppe Spin(σ) mit Spin(n,K).

Ist ganz speziell $V = \mathbb{R}^{10}$, $\tilde{V} = \mathbb{C}^{10}$ mit den oben beschriebenen „kanonischen" Bilinearformen σ und $\tilde{\sigma}$, also $\mathrm{Spin}(\sigma) = \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R})$ und $\mathrm{Spin}(\tilde{\sigma}) = \mathrm{Spin}(10,\mathbb{C})$,

$$\rho: \mathrm{Spin}(10,\mathbb{C}) \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(S)$$

die Spin-Darstellung, dann ist $\dim_{\mathbb{C}} S = 32$, da nach [2], S.42, $C(\tilde{\sigma}) \cong \mathfrak{M}_{32,32}(\mathbb{C})$. Sind

$$\rho_i: \mathrm{Spin}(10,\mathbb{C}) \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(S_i), \qquad i = 1, 2,$$

die Halbspin-Darstellungen, so ist $\dim_{\mathbb{C}} S_1 = \dim_{\mathbb{C}} S_2 = 16$, da $C^+(\tilde{\sigma})$ die direkte Summe zweier einfacher Ideale von jeweils der Dimension 2^8 ist, die zu $\mathfrak{M}_{16,16}(\mathbb{C})$ isomorph sein müssen ([2], S.71 und S.45).

Übrigens sind die beiden Halbspin-Darstellungen von Spin(10,$\mathbb{C}$) injektiv ([2], S.101; das Element z aus III. 6.1 ist nämlich $z = i \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{10}$, wobei $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ die kanonischen Basis des $\mathbb{R}^{10}$ ist).

Die Halbspin-Darstellungen der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$ sind die durch die Halbspin-Darstellungen der zugehörigen einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe Spin(10,$\mathbb{C}$) ([14], S.35) induzierten.

§2. DIE KANONISCHE REALISIERUNG DER BESCHRÄNKTEN SYMMETRISCHEN GEBIETE

SATZ 4: (i) Sei M ein irreduzibles beschränktes symmetrisches Gebiet, G die Zusammenhangskomponente der Identität in der reellen Lie-Gruppe Ω(M), K die Stabilitätsgruppe eines (beliebigen festen) Punktes von M in G. Dann gilt:

G ist eine zusammenhängende, nicht-kompakte einfache reelle Lie-Gruppe mit trivialem Zentrum, K ist eine maximale kompakte Untergruppe von G mit nicht-diskretem Zentrum.

(ii) Ist umgekehrt G eine zusammenhängende, nicht-kompakte einfache reelle Lie-Gruppe mit endlichem Zentrum, K eine maximale kompakte Untergruppe von G mit nicht-diskretem Zentrum, die das Zentrum von G enthält, so besitzt der Raum G/K eine G-invariante komplexe Struktur, so daß G/K analytisch isomorph zu einem irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebiet M ist; die dadurch induzierte Operation von G auf M liefert gerade die Zusammenhangskomponente der Identität von Ω(M) und die Operation von K die Stabilitätsgruppe in G des Punktes K/K in G/K.

([4], S.311, Theorem 7.1, S.310, Theorem 6.1 (i) und VIII.§4 auf S.301 ff.; ferner [14]. S.15)

Sei nun M ein irreduzibles beschränktes symmetrisches

Gebiet, $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der reellen Lie-Gruppe $\Omega(M)$, $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der Stabilitätsgruppe eines Punktes von M, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von $\mathfrak{k}$. Sei weiter $G^{\mathbb{C}}$ die zu $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ gehörige einfach-zusammenhängende komplexe Lie-Gruppe, $K^{\mathbb{C}}$, G, $K \subseteq G^{\mathbb{C}}$ jeweils die zur Unteralgebra $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ gehörige Untergruppe.

<u>SATZ 5</u> (Matsushima/Murakami): Sei V ein komplexer endlich-dimensionaler Vektorraum,

$$\rho: G^{\mathbb{C}} \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$$

eine nicht-triviale irreduzible analytische Darstellung. Dann ist die eingeschränkte Darstellung $\rho|_{K^{\mathbb{C}}}$ vollständig reduzibel, also

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s \ , \quad \rho|_{K^{\mathbb{C}}} = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_s$$

mit Darstellungen

$$\rho_i: K^{\mathbb{C}} \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V_i), \qquad i = 1, \dots, s$$

(wobei die V_i auf ganz bestimmte Weise definiert sind und die Numerierung für die folgenden Anwendungen nicht abgeändert werden darf).

([9], S.119)

ANMERKUNG: ρ_1 ist dabei irreduzibel, $\rho_2, \dots, \rho_s$ können eventuell noch weiter reduzierbar sein.

Setzt man $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = p$, $\dim_{\mathbb{C}} V_2 = r$, $\dim_{\mathbb{C}}(V_2 \oplus \dots \oplus V_s) = q$, so erhält man hieraus mit einer Identifizierung $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} V = \mathfrak{M}_{p+q,p+q}(\mathbb{C})$ bezüglich einer geeigneten Basis von V:

SATZ 6 (Ise/Yokonuma): Das irreduzible beschränkte symmetrische Gebiet M ist analytisch isomorph zu einem Gebiet M' in $\mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, auf dem G folgendermaßen operiert:

Ist $\omega \in G$, $\rho(\omega) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p+q,p+q}(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$,
wobei $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V_1$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $C \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $D \in \mathfrak{M}_{q,q}(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_2 \oplus \ldots \oplus V_s)$, $Z \in M' \subseteq \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, so ist

$$\omega(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

(Dabei ist $\mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ durch

$$\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{p1} & \cdots & z_{pr} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{p1} & \cdots & z_{pr} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

identifiziert.)

([9], S.123/124)

KOROLLAR: Die Untergruppe K operiert dabei als Stabilitätsgruppe (in G) von $0 \in M'$ folgendermaßen:

Für $\omega \in K$ ist $B = 0$, $C = 0$, $A = \rho_1(\omega)$,

$$D = \begin{pmatrix} \rho_2(\omega) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_s(\omega) \end{pmatrix}, \quad \rho_2(\omega) \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V_2,$$

und $\omega(Z) = AZD^{-1} = \rho_1(\omega) \cdot Z \cdot \rho_2(\omega)^{-1}$ für $Z \in M' \subseteq \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{C})$ ($\subseteq \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ wie oben).

Beweis: folgt unmittelbar aus den Sätzen 5 und 6 und [9], S.120, erste Zeile. $\square$

DEFINITION 4: Ist ρ eine nicht-triviale analytische Darstellung von $G^{\mathbb{C}}$ von minimaler Dimension, so heißt das Gebiet M' aus Satz 6 eine kanonische Realisierung von M.

ANMERKUNG: Die kanonische Realisierung ist durch Definition 4 nicht eindeutig bestimmt: Sie hängt von der konkreten Wahl der Darstellung minimaler Dimension ab; außerdem kann es mehrere nicht-äquivalente Darstellungen minimaler Dimension geben. Wenn von <u>der</u> kanonischen Realisierung die Rede ist, so soll stets eine irgendwie fest gewählte gemeint sein.

§3. DIE STABILITÄTSGRUPPE VON R_{16}

Die eben aufgeführten Ergebnisse aus [9] können nun, wie in [10] skizziert, auf das 16-dimensionale Ausnahmegebiet in seiner kanonischen Realisierung R_{16} angewendet werden. Da in [10] jedoch keine Beweise angegeben sind und das für die Bestimmung der Automorphismen von R_{16} entscheidende Ergebnis, Proposition 4 auf S.235, nicht genau genug formuliert ist, sollen hier bis auf eine Ausnahme in Satz 8 vollständige Beweise durchgeführt werden.

Die Komplexifizierung der Lie-Algebra von $\Omega(R_{16})$ ist nach [4], S.354, die Ausnahme-Algebra E_6. Ist $A = H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$ die 27-dimensionale komplexe Ausnahme-Jordan-Algebra, Der A ihre Derivationen-Algebra und $A' = \{x \in A \mid \operatorname{tr} x = 0\}$, so wird E_6 üblicherweise realisiert als die Unteralgebra $\mathfrak{l} := \operatorname{Der} A \oplus L[A']$ von $\mathfrak{gl}(A)$ ([12], S.23, oder [1], S.281, Satz 3.1, und S.293). Dabei ist für $D \in \operatorname{Der} A$ und $x \in A$: $[D, L(x)] = L(Dx)$, und für $x \in A'$ auch $Dx \in A'$ ([1], S.277 und S.58, Satz 14.5).

Die identische Darstellung $\mathfrak{l} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(A)$ von $\mathfrak{l}$ auf A ist eine der beiden irreduziblen Darstellungen kleinster Dimension von E_6 ([14], S.45, Zeile 5 und 6 von unten), führt also tatsächlich auf das kanonische Modell R_{16} des

16-dimensionalen Ausnahmegebiets.

Für das Idempotent $c = c_1 = (1,0,0;\ 0,0,0)$ von A sei $A = A_1(c) \oplus A_{1/2}(c) \oplus A_0(c)$ die Peirce-Zerlegung. Weiter sei $\mathcal{D}$ die Lie-Unteralgebra $\mathcal{D} := \{D \in \mathrm{Der}\,A \mid Dc = 0\}$ von Der A (nach [11], S.91, ist $\mathcal{D} \cong \mathfrak{so}(9,\mathbb{C})$), $V := A' \cap (A_1(c) \oplus A_0(c))$, $\mathcal{L}_0 := L[V] \subseteq \mathfrak{gl}(A)$; die $D \in \mathcal{D}$ und die $L(x) \in \mathcal{L}_0$ erhalten die Peirce-Komponenten $A_1(c)$, $A_{1/2}(c)$ und $A_0(c)$, wie man leicht nachrechnet (s.a. [1], S.155). $\mathfrak{k} := \mathcal{D} \oplus \mathcal{L}_0$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{l}$; es gilt $[\mathcal{D},\mathcal{D}] = \mathcal{D}$ (da $\mathcal{D}$ einfach), $[\mathcal{L}_0,\mathcal{L}_0] \subseteq \mathcal{D}$, $[\mathcal{D},\mathcal{L}_0] \subseteq \mathcal{L}_0$ ([1], S.293 und 289), also $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] = \mathcal{D} \oplus [\mathcal{D},\mathcal{L}_0]$.

Unser Ziel ist zu zeigen, daß $\mathfrak{k}$ die Komplexifizierung der Lie-Algebra der Stabilitätsgruppe $\Sigma(R_{16})$ ist.

Für das folgende „technische" Lemma wird $c = c_1$ durch $c_2 = (0,1,0;\ 0,0,0)$ und $c_3 = (0,0,1;\ 0,0,0)$ zu einem vollständigen Orthonormalsystem von A ergänzt; $A = \bigoplus_{i \leq j} A_{ij}$ sei die zugehörige Peirce-Zerlegung. Außerdem sei $W := V \cap A_0(c) = \{x \in A_0(c) \mid \mathrm{tr}\,x = 0\} = \{\lambda c_2 - \lambda c_3 + y \mid \lambda \in \mathbb{C},\ y \in A_{23}\}$. Sei ν die kanonische (nicht-ausgeartete) Bilinearform der Cayley-Algebra $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$ ([1], S.221/222). Damit ist das Produkt von $x = (0,0,0;\ u,0,0)$ und $y = (0,0,0;\ v,0,0) \in A_{23}$, $u, v \in \mathbb{O}^{\mathbb{C}}$, gegeben durch $xy = \nu(u,v)\cdot(c_2 + c_3)$ ([1], S.227).

<u>LEMMA 2</u>: (i) Für $z = (0,0,0;\ w,0,0)$, $y = (0,0,0;\ v,0,0) \in A_{23}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$[L(c_2),L(z)](\lambda c_2 - \lambda c_3 + y) = \tfrac{1}{2}\cdot\nu(w,v)\cdot(c_2 - c_3) - \tfrac{1}{2}\lambda z.$$

(ii) Für $z \in A_{23}$ ist die innere Derivation $[L(c_2),L(z)]$ in $\mathcal{D}$.

(iii) Für jedes $y \in W - \{0\}$ gibt es ein $D \in \mathcal{D}$ mit $Dy \neq 0$.

(iv) Für jedes $x \in W$ gibt es $D \in \mathfrak{D}$ und $y \in W$ mit $x = Dy$.

(v) Es ist $V = \mathbb{C}(3c-e) \oplus W$, und für $D \in \mathfrak{D}$ ist $D[V] \subseteq W$.

Beweis: (i) $[L(c_2),L(z)](\lambda c_2 - \lambda c_3 + y)$

$$= c_2 \cdot (z \cdot (\lambda c_2 - \lambda c_3 + y)) - z \cdot (c_2 \cdot (\lambda c_2 - \lambda c_3 + y))$$
$$= c_2 \cdot (\tfrac{1}{2}\lambda z - \tfrac{1}{2}\lambda z + \nu(w,v) \cdot (c_2 + c_3)) - z \cdot (\lambda c_2 + \tfrac{1}{2}y)$$
$$= \nu(w,v) \cdot c_2 - \tfrac{1}{2}\lambda z - \tfrac{1}{2}\nu(w,v) \cdot (c_2 + c_3)$$
$$= \tfrac{1}{2}\nu(w,v) \cdot c_2 - \tfrac{1}{2}\nu(w,v) \cdot c_3 - \tfrac{1}{2}\lambda z.$$

(ii) $[L(c_2),L(z)]c_1 = c_2(zc_1) - z(c_2c_1) = c_2 \cdot 0 - z \cdot 0 = 0.$

(iii) Sei $y = \lambda c_2 - \lambda c_3 + y'$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y' = (0,0,0;\ v,0,0) \in A_{23}$. Ist $v \neq 0$, so wählen wir $w \in \mathbb{O}^{\mathbb{C}}$ mit $\nu(w,v) \neq 0$, $z = (0,0,0;\ w,0,0)$ und $D = [L(c_2),L(z)]$. Ist $v = 0$, also $\lambda \neq 0$, so wählen wir $z \in A_{23} - \{0\}$ beliebig und $D = [L(c_2),L(z)]$.

(iv) Sei $x = \mu c_2 - \mu c_3 + x'$, $x' = (0,0,0;\ u,0,0) \in A_{23}$, $\mu \in \mathbb{C}$. Ist $u = 0$, $\mu \neq 0$, wählen wir w, $v \in \mathbb{O}^{\mathbb{C}}$ mit $\nu(w,v) = 2\mu$, $z = (0,0,0;\ w,0,0) \in A_{23}$, $y = (0,0,0;\ v,0,0) \in A_{23} \subseteq W$, $D = [L(c_2),L(z)]$. Sonst wählen wir $v \in \mathbb{O}^{\mathbb{C}}$ mit $\nu(u,v) = 2\mu$, $y = (0,-2,2;\ v,0,0)$, $D = [L(c_2),L(x')]$. In beiden Fällen ist nach (i) $Dy = x$.

(v) klar $\square$

LEMMA 3: (i) Das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{k}$ ist $\mathbb{C} \cdot L(3c-e)$.

(ii) Mit $\mathcal{L}_0' := L[W]$ gilt $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] = \mathfrak{D} \oplus \mathcal{L}_0'$.

(iii) $\mathfrak{k} = \mathfrak{z} \oplus [\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$.

Beweis: (i) Sei $D_0 + L(x_0) \in \mathfrak{z}$ mit $D_0 \in \mathfrak{D}$, $x_0 \in V$. Dann ist insbesondere für alle $D \in \mathfrak{D}$

$$0 = [D,\ D_0 + L(x_0)] = \underbrace{[D,D_0]}_{\in \mathfrak{D}} + \underbrace{L(Dx_0)}_{\in \mathcal{L}_0},$$

also $[D,D_0] = 0$ und $Dx_0 = 0$. Da $\mathfrak{D}$ einfach ist, folgt sofort $D_0 = 0$.

Ist $x_0 = \lambda\cdot(3c-e) + y_0$ mit $y_0 \in W$, so ist $0 = Dx_0 = Dy_0$ für alle $D \in \mathfrak{D}$ und somit nach Lemma 2 (iii) $y_0 = 0$, also $x = \lambda(3c-e)$. Damit ist gezeigt $\mathfrak{Z} \subseteq \mathbb{C}\cdot L(3c-e)$.

Umgekehrt ist $L(3c-e) \in \mathfrak{Z}$, denn für $D \in \mathfrak{D}$ ist

$$[D,L(3c-e)] = L(D(3c-e)) = 0,$$

und für $x = \lambda(3c-e) + y \in V$ mit $y \in W$ ist $y(cz) - c(yz) = 0$ für alle $z \in A_1(c)$, $A_{1/2}(c)$ und $A_0(c)$, also

$$[L(x),L(3c-e)] = [L(y),L(3c-e)] = 3\cdot[L(y),L(c)] = 0.$$

(ii) Es ist nur noch zu zeigen: $[\mathfrak{D},\mathcal{L}_0] = \mathcal{L}'_0$.
Da $[D,L(x)] = L(Dx) \in \mathcal{L}'_0$ für $D \in \mathfrak{D}$, $x \in V$ nach Lemma 2 (v), ist $[\mathfrak{D},\mathcal{L}_0] \subseteq \mathcal{L}'_0$. Nach Lemma 2 (iv) spannen die Dy mit $D \in \mathfrak{D}$ und $y \in V$ ganz W auf, also ist $[\mathfrak{D},\mathcal{L}_0] = \mathcal{L}'_0$.

(iii) trivial, da $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}'_0 \oplus \mathfrak{Z}$. □

Die symmetrische Bilinearform $(x,y) \longmapsto tr(xy)$ von A ist nicht-ausgeartet ([1], S.225); die Peirce-Zerlegung $A = A_1(c) \oplus A_{1/2}(c) \oplus A_0(c)$ ist trivialerweise eine Orthogonalzerlegung. Also trägt $A_0(c)$ die nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform σ mit $\sigma(x,y) := \frac{1}{2}\,tr(xy)$. Da die Zerlegung $A_0(c) = \mathbb{C}\cdot e_0 \oplus W$ σ-orthogonal ist ($e_0 = e-c$ ist das Einselement von $A_0(c)$), ist σ auf W nicht-ausgeartet. $A_0(c)$ trägt also die weitere nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform μ mit

$$\mu(\alpha e_0+x,\ \beta e_0+y) := \alpha\beta - \sigma(x,y) \quad \text{für } \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ x,\ y \in W.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist für $x,\ y \in W$ $xy = \sigma(x,y)\cdot e_0$, also

$$(\alpha e_0+x)\cdot(\beta e_0+y) = (\alpha\beta + \sigma(x,y))\cdot e_0 + \beta x + \alpha y.$$

(Man ersieht hieraus übrigens ohne weiteres, daß $A_0(c)$ die Jordan-Algebra $[\mathbb{C}^{10},\mu,e_0]$ ist.) Für $D\in\mathfrak{D}$, $\alpha e_0+x\in A_0(c)$ ist $D(\alpha e_0+x) = Dx \in W$ (Lemma 2 (v)).

<u>SATZ 7</u>: (i) $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \cong \mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$.

(ii) $\mathfrak{k} \cong \mathbb{C} \oplus \mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$.

(iii) $\mathfrak{k}$ ist die Komplexifizierung der Lie-Algebra von $\sum(R_{16})$ in $\mathfrak{l}$.

<u>Beweis</u>: (i) Wir realisieren $\mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$ als $\mathfrak{so}(\mu)$, also als die Lie-Algebra der μ-schiefen $\mathbb{C}$-Endomorphismen von $A_0(c)$. Für $D\in\mathfrak{D}$ ist nun (da tr $D(xy) = 0$!)

$$\begin{aligned}\mu(D(\alpha e_0+x),\ \beta e_0+y) &= \mu(Dx,\ \beta e_0+y) = -\sigma(Dx,y)\\ &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(Dx\cdot y) = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(x\cdot Dy) = \sigma(x,Dy) = -\mu(\alpha e_0+x, D(\beta e_0+y)),\end{aligned}$$

und für $z\in W$

$$\begin{aligned}\mu(L(z)(\alpha e_0+x),\ \beta e_0+y) &= \mu(\sigma(z,x)\cdot e_0 + \alpha z,\ \beta e_0 + y)\\ &= \sigma(z,x)\cdot\beta - \alpha\cdot\sigma(z,y) = -\mu(\alpha e_0+x,\ \sigma(z,y)\cdot e_0 + \beta z)\\ &= -\mu(\alpha e_0+x,\ L(z)(\beta e_0+y)).\end{aligned}$$

Also haben wir die Abbildung $\phi: [\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \longrightarrow \mathfrak{so}(\mu)$, $T \mapsto T|_{A_0(c)}$. Sei nun $D + L(x) \in [\mathfrak{k},\mathfrak{k}] = \mathfrak{D}\oplus\mathcal{L}_0'$ mit $D + L(x)|_{A_0(c)} = 0$. Dann ist insbesondere $0 = (D+L(x))e_0 = x$, also schon $D|_{A_0(c)} = 0$ und somit $Dc_1 = Dc_2 = Dc_3 = 0$ und auch $D|_{A_{23}} = 0$. Nach [12], S.18, Prop.6 bilden die Derivationen von A, die auf c_1, c_2 und c_3 verschwinden, eine zu $\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ isomorphe Lie-Algebra, wobei der Isomorphismus z.B. durch $D \mapsto D|_{A_{23}}$ geliefert wird. Damit folgt $D = 0$ und die Injektivität von ϕ. Da $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{D}\oplus\mathcal{L}_0') = \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{so}(9,\mathbb{C}) + \dim_{\mathbb{C}}W = 36 + 9 = 45 =$

$\dim_C \mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$, ist Φ ein Isomorphismus.

(ii) folgt aus (i) und Lemma 3 (i),(iii), da $\mathfrak{z} \cong \mathbb{C}$.

(iii) Nach [4], S.354, ist die zu $\Sigma(R_{16})$ gehörige Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{e}_{6(-14)}$ von $\Omega(R_{16})$ isomorph zu $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10,\mathbb{R})$. Also ist $\mathfrak{k}$ die Komplexifizierung der Lie-Algebra einer maximalen kompakten Untergruppe von $\Sigma(R_{16})$. Die Behauptung folgt nun aus Satz 4. $\square$

KOROLLAR: Die Operation von $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ auf $A_0(c)$ ist äquivalent zur identischen Darstellung von $\mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$.

LEMMA 4: Die Operation von $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ auf $A_{1/2}(c)$ ist äquivalent zu einer Halbspin-Darstellung von $\mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$.

Beweis: $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ ist einfach, $A_{1/2}(c)$ ein endlich-dimensionaler $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$-Modul, also halbeinfach ([14], S.7). Die Dimensionen der halbeinfachen $\mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$-Moduln sind 10, 16, 45, 120, Vielfachprodukte dieser Zahlen und $\mathbb{N}$-Linearkombinationen dieser Vielfachprodukte ([14], S.8 und S.36, Zeile 4). Also kann $A_{1/2}(c)$ nur einer der beiden Halbspin-Moduln und muß insbesondere einfach sein. $\square$

SATZ 8: Sei ρ die identische Darstellung von $\mathfrak{L}$ auf A. Dann ist $\rho|_{\mathfrak{k}}$ vollständig reduzibel; die Zerlegung von A in einfache $\mathfrak{k}$-Moduln ist gerade die Peirce-Zerlegung $A = A_1(c) \oplus A_{1/2}(c) \oplus A_0(c)$. Die Darstellungen ρ_1, ρ_2, ρ_3 (nach Satz 5) von $\mathfrak{k} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{so}(10,\mathbb{C})$ auf $A_1(c)$, $A_{1/2}(c)$ und $A_0(c)$ sind gegeben durch

$$\rho_1: \mathbb{C}\oplus\mathfrak{so}(10,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}\,A_1(c) \cong \mathbb{C}, \qquad (\lambda,T)\longmapsto 2\lambda,$$

$$\rho_2: \mathbb{C}\oplus\mathfrak{so}(10,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}\,A_{1/2}(c) \cong \mathfrak{gl}(16,\mathbb{C}), \quad (\lambda,T)\mapsto \tfrac{1}{2}\lambda 1_{16}+\rho_h^*(T),$$

$$\rho_3: \mathbb{C}\oplus\mathfrak{so}(10,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}\,A_0(c) \cong \mathfrak{gl}(10,\mathbb{C}), \quad (\lambda,T)\mapsto -\lambda 1_{10}+T,$$

wobei ρ_h^* eine der Halbspin-Darstellungen von $\mathfrak{o}(10,\mathbb{C})$ ist.

<u>Beweis</u>: Sei stets $T\in[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

I. Operation auf $A_1(c) = \mathbb{C}c$:
Da $T = D + L(x)$ mit $D\in\mathfrak{D}$, $x\in W \subseteq A_0(c)$, ist $Tc = 0$, also $(T + \lambda\cdot L(3c-e))c = 3\lambda c - \lambda c = 2\lambda c$, also $\rho_1(\lambda,T) = 2\lambda$.

II. Operation auf $A_{1/2}(c)$:
$(T + \lambda\cdot L(3c-e))z = Tz + \lambda\cdot\frac{3}{2}z - \lambda z = Tz + \frac{1}{2}\lambda z$ für $z\in A_{1/2}(c)$, also $\rho_2(\lambda,T) = \frac{1}{2}\lambda\cdot 1_{16} + \rho_h^*(T)$.

III. Operation auf $A_0(c)$:
$(T + \lambda\cdot L(3c-e))z = Tz - \lambda z$ für $z\in A_0(c)$,
also $\rho_3(\lambda,T) = -\lambda\cdot 1_{10} + T$.

Insbesondere folgt aus I - III die Einfachheit der $\mathfrak{k}$-Moduln $A_1(c)$, $A_{1/2}(c)$, $A_0(c)$.

Über die Reihenfolge ρ_1, ρ_2, ρ_3 läßt sich folgendes sagen: Nach dem Korollar zu Satz 6 ist $16 = \dim R_{16} = \dim\rho_1\cdot\dim\rho_2$; daher ist ρ_3 aus Dimensionsgründen richtig gewählt, und es ist nur noch über die Reihenfolge ρ_1, ρ_2 zu entscheiden. Das ist nicht schwer, aber etwas langwierig, und soll hier nicht ausgeführt werden. (In der Bezeichnungsweise von [12], S.36, wäre wegen [9], S.119, Lemma 2 (ii), zu zeigen, daß sowohl der irreduzible $\mathfrak{k}$-Modul A als auch der irreduzible $\mathfrak{k}$-Modul $A_1(c)$ die Linearform λ_5 als höchstes Gewicht hat.) $\square$

Sei nun $A_o = H_3(\mathbb{O})$ die 27-dimensionale formal-reelle Ausnahme-Jordan-Algebra, als reelle Form von A aufgefaßt, $A_o' := A'\cap A_o = \{x\in A_o \mid \operatorname{tr} x = 0\}$, $\mathfrak{D}_o := \{D\in\mathfrak{D} \mid D[A_o]\subseteq A_o\}$, $V_o := V\cap A_o$, $W_o := W\cap A_o$. Damit gilt:

LEMMA 5: (i) Die kompakte reelle Form ℓ_0 von ℓ ist
$\ell_0 := \mathrm{Der}\, A_0 \oplus i\cdot L[A_0']$.

(ii) Die Lie-Algebra von $\Sigma(R_{16})$ ist $\mathfrak{k}_0 := \mathfrak{D}_0 \oplus i\cdot L[V_0]$ ($\cong \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10,\mathbb{R})$).

(iii) Die Darstellungen ρ_1, ρ_2, ρ_3 haben auf $\mathfrak{k}_0$ die Form:

$\rho_1: \mathbb{R}\oplus\mathfrak{so}(10,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (t,T) \longmapsto 2it,$

$\rho_2: \mathbb{R}\oplus\mathfrak{so}(10,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(16,\mathbb{C}), \quad (t,T) \longmapsto \frac{1}{2}it\cdot 1_{16} + \rho_h^*(T),$

$\rho_3: \mathbb{R}\oplus\mathfrak{so}(10,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(10,\mathbb{C}), \quad (t,T) \longmapsto -it\cdot 1_{10} + T.$

Beweis: (i) Nach der in [1], S.292, angegebenen Formel für die Killing-Form κ von ℓ ist

$$\kappa(D+L(x),D+L(x)) = 4\cdot \mathrm{Spur}\, D^2 + 12\cdot \mathrm{tr}\, x^2,$$

und $\mathrm{Spur}\, D^2$ ist ein Vielfaches der Killing-Form von Der A. Da $\mathrm{Der}\, A_0 \cong \mathfrak{so}(9,\mathbb{R})$ (vgl. [8], S.389), also kompakt, ist die Form $\mathrm{Spur}\, D^2$ auf $\mathrm{Der}\, A_0$ negativ-definit. Nach [1], S.330, ist die durch tr induzierte Bilinearform auf A_0 positiv-definit. Daher ist die Killing-Form von ℓ_0 negativ-definit, ℓ_0 also kompakt.

(ii) folgt sofort, weil die Lie-Algebra von $\Sigma(R_{16})$ $\mathfrak{k}\cap\ell_0$ ist. Der Isomorphismus in (ii) hat auf dem Zentrum $\mathbb{R}$ der Algebra die Form $t \longmapsto itL(3c-e)$. Daraus folgt unmittelbar (iii). □

ANMERKUNG: $\mathfrak{so}(10,\mathbb{R})$ ist als Unteralgebra von $\mathfrak{k}_0$ die Algebra der μ-schiefen $\mathbb{R}$-Endomorphismen des reellen Vektorraums $\mathbb{R}e_0 \oplus iW_0$, auf dem μ positiv-definit ist.

Damit läßt sich jetzt $\Sigma(R_{16})$ ausrechnen: Die einfach zusammenhängende Lie-Gruppe zu $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10,\mathbb{R})$ ist $(\mathbb{R},+)\times \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R})$. ρ_1 und ρ_2 induzieren darauf die Darstellungen

$\rho_1: \mathbb{R}\times \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \qquad (t,s)\longmapsto \exp(2it),$

$\rho_2: \mathbb{R}\times \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(16,\mathbb{C}), \quad (t,s)\longmapsto \exp(\frac{1}{2}it)\cdot \rho_h'(s),$

wobei ρ_h' eine der Halbspin-Darstellungen von $\mathrm{Spin}(10,\mathbb{C}) \supseteq \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R})$ ist. ρ_1 und ρ_2 sind über $\mathbb{R}\longrightarrow U(1)$, $t\longmapsto \exp(\frac{1}{2}it)$, faktorisierbar, induzieren also

$\tilde\rho_1: U(1)\times \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \qquad (\eta,s)\longmapsto \eta^4,$

$\tilde\rho_2: U(1)\times \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(16,\mathbb{C}), \quad (\eta,s)\longmapsto \eta\cdot\rho_h'(s).$

Nach [13], S.121, ist $\Omega(R_{16})$ zusammenhängend, d.h., die Operation von $U(1)\times \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R})$ auf R_{16} ergibt die volle Stabilitätsgruppe $\Sigma(R_{16})$. Damit ist nach dem Korollar zu Satz 6 bewiesen, daß jeder Automorphismus von $R_{16}\subseteq \mathfrak{M}_{1,16}(\mathbb{C})$ die Form

$$Z\longmapsto \eta\cdot Z\cdot \rho_h'(s)^{-1}$$

hat mit $\eta\in U(1)$, $s\in \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R})$, ρ_h' (bis auf Äquivalenz) eine der Halbspin-Darstellungen von $\mathrm{Spin}(10,\mathbb{C})$. Wir identifizieren noch $\mathfrak{M}_{1,16}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{16}$ durch Transponieren, und weil die beiden Halbspin-Darstellungen ρ_h' und ρ_h zueinander kontragredient sind, erhalten wir:

<u>THEOREM 1</u>: Die Stabilitätsgruppe $\Sigma(R_{16})$ der kanonischen Realisierung $R_{16}\subseteq \mathbb{C}^{16}$ des 16-dimensionalen Ausnahmegebiets besteht gerade aus den Abbildungen

$$z\longmapsto \eta\cdot\rho_h(s)z$$

mit $\eta\in U(1)$ und $s\in \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R})$, wobei ρ_h eine der beiden Halbspin-Darstellungen von $\mathrm{Spin}(10,\mathbb{C})$ ist. Insbesondere hat R_{16} Normalform im Sinne von Definition 2.

ANMERKUNGEN: 1.) Man kann leicht ausrechnen, daß der Kern der Operation von $U(1)\times Spin(10,\mathbb{R})$ auf R_{16} die Diagonale über der in beiden Gruppen $U(1)$ und $Spin(10,\mathbb{R})$ enthaltenen Untergruppe $\{i,-1,-i,1\} \cong Z_4$ ist.

2.) Vermutung: Die kanonische Realisierung von M.Ise für das 16-dimensionale Ausnahmegebiet stimmt mit der von U. Hirzebruch in [8], §3, konstruierten überein (zumindest wenn die Identifikation $\mathfrak{M}_{1,10}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{16}$ als Identifikation $End_{\mathbb{C}} A_o(c) = A_o(c)$ gedeutet wird).

§4. DIE SPIEGELUNGEN VON R_{16}

Seien jetzt stets

$$\rho: Spin(10,\mathbb{C}) \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(S), \quad \rho_i: Spin(10,\mathbb{C}) \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(S_i),$$

$i = 1, 2,$ die Spin-Darstellung bzw. die beiden Halbspin-Darstellungen.

Wir nehmen nun an, eine der in Theorem 1 beschriebenen Abbildungen $\eta\cdot\rho_i(s) \in GL_{\mathbb{C}}(S_i)$ sei Spiegelung in 0 (wobei wir aufgrund unserer Herleitung nicht wissen, ob $i = 1$ oder 2). Dann muß für dieses $s \in Spin(10,\mathbb{R})$ $\rho_i(s)$ diagonalisierbar sein mit dem 15-fachen Eigenwert $1/\eta$ und dem einfachen Eigenwert λ/η mit $\lambda \neq 1$, $\lambda^m = 1$. Da ρ_1 und ρ_2 kontragredient sind, folgt:

<u>LEMMA 6</u>: Gibt es in $\Sigma(R_{16})$ eine Spiegelung mit dem Eigenwert $\lambda \neq 1$, so gibt es ein $s \in Spin(10,\mathbb{R})$, so daß $\rho(s)$ diagonalisierbar ist mit den Eigenwerten

$$\eta \text{ und } 1/\eta \quad 15\text{-fach}, \quad \eta/\lambda \text{ und } \lambda/\eta \quad 1\text{-fach}$$

(nicht notwendig alle verschieden).

Die Anwendung von Satz 3 ergibt nun:

LEMMA 7: Gibt es in $\Sigma(R_{16})$ eine Spiegelung mit dem Eigenwert $\lambda \neq 1$, so gibt es ein $s \in Spin(10,\mathbb{R})$, so daß $\chi(s)$ diagonalisierbar ist und auf $C^{+}(\tilde{\sigma})$ die Eigenwerte

1 452-fach, λ 30-fach, $1/\lambda$ 30-fach,

auf $C^{-}(\tilde{\sigma})$ die Eigenwerte (mit $\varsigma := \eta^2$)

ς 225-fach, $1/\varsigma$ 225-fach,
ς/λ 30-fach, λ/ς 30-fach,
ς/λ^2 1-fach, λ^2/ς 1-fach

hat (die natürlich nicht notwendig alle verschieden sein müssen).

Beweis: klar, denn ist $\{z_1, \ldots, z_{16}\}$ eine Eigenbasis von $\rho_1(s)$, $\{z_1', \ldots, z_{16}'\}$ eine von $\rho_2(s)$, so erhält man aus den Tensorprodukten Eigenbasen von $\rho \otimes \rho(c)$ auf $S_1 \otimes S_1$, $S_2 \otimes S_2$, $S_1 \otimes S_2$ und $S_2 \otimes S_1$. □

Damit haben wir aus der vorgegebenen Spiegelung mit $s \in Spin(10,\mathbb{R})$ auf dem Weg über Spin-Darstellung und Tensorprodukt einen Automorphismus von $C(\tilde{\sigma})$ mit einer bestimmten Eigenwertverteilung konstruiert.

Es gibt aber noch einen andern Weg, von s ausgehend zu demselben Automorphismus $\chi(s)$ zu gelangen: über die Vektor-Darstellung und anschließende Fortsetzung auf $C(\tilde{\sigma})$; diese Fortsetzung ist wegen der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebra eindeutig bestimmt ([2], S.39).

Es ist $V \subseteq \tilde{V} \subseteq C^{-}(\tilde{\sigma})$ und $\chi(s)|_V \in SO(\sigma) = SO(10,\mathbb{R})$. Also hat $\chi(s)|_{\tilde{V}}$ fünf (nicht notwendig verschiedene) Paare von zueinander inversen Eigenwerten μ_1, $\mu_2 = 1/\mu_1$, ...,

μ_9, $\mu_{10} = 1/\mu_9$.

Ist $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ eine zugehörige Eigenbasis von $\tilde{V}$, so ist $\{x_M \mid M \subseteq \{1, \ldots, 10\}\}$ eine Eigenbasis von $C(\tilde{\mathfrak{S}})$ bezüglich $\chi(s)$; $\chi(s)$ hat also die Eigenwerte

$$\mu_M := \mu_{i_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{i_m}, \quad M = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, 10\},$$

wobei $i_1 < \ldots < i_m$. Insbesondere ist $\mu_\emptyset = 1$. Auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$ hat $\chi(s)$ die Eigenwerte

$$\mu_M \quad \text{mit} \quad m \equiv 0 \pmod 2,$$

auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$ die Eigenwerte

$$\mu_M \quad \text{mit} \quad m \equiv 1 \pmod 2.$$

Es ist also nur noch festzustellen, ob bei den verschiedenen Möglichkeiten für $\mu_1, \mu_3, \mu_5, \mu_7, \mu_9$ die in Lemma 7 geforderte Verteilung der Eigenwerte auf $C(\tilde{\mathfrak{S}})$ herauskommen kann. Dazu genügt es, für $\mu_1, \mu_3, \mu_5, \mu_7, \mu_9$ die Werte

$$1/\varrho, \quad \lambda/\varrho, \quad \lambda^2/\varrho$$

(den letzten höchstens einfach) zuzulassen.

<u>LEMMA 8</u>: Der Fall $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = \mu_9$ ist nicht möglich.

<u>Beweis</u>: Sei $\mu = \mu_1 = \ldots$. Die Eigenwerte μ_M auf $C(\tilde{\mathfrak{S}})$ sind dann

$$\mu^{5-\nu} \quad \binom{10}{\nu}\text{-fach} \quad \text{für} \quad \nu = 0, \ldots, 10,$$

wie man leicht nachrechnet, und zwar entfällt $\mu^{5-\nu}$ für ungerades ν auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$, für gerades ν auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$. $\chi(s)$ hat also auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$ die Eigenwerte

$$\mu^4 \ \ 10\text{-fach}, \quad \mu^2 \ \ 120\text{-fach}, \quad 1 \ \ 252\text{-fach},$$
$$1/\mu^2 \ \ 120\text{-fach}, \quad 1/\mu^4 \ \ 10\text{-fach}.$$

Damit die 1 452-fach zusammenkommt, müßte $\mu^2 = 1$ oder $1/\mu^2 = 1$ sein. Dann sind aber alle Eigenwerte auf $C^+(\tilde{\sigma})$ gleich 1 und keiner gleich λ oder $1/\lambda$. Widerspruch. □

LEMMA 9: Kommt der Eigenwert λ^2/ϱ auf $\tilde{V}$ vor, so muß er gleich einem der übrigen auf $C^-(\tilde{\sigma})$ möglichen Eigenwerte ϱ, $1/\varrho$, λ/ϱ, ϱ/λ sein.

Beweis: Sei etwa $\mu_9 = \lambda^2/\varrho$. Dann kommt λ^2/ϱ auf $C^-(\tilde{\sigma})$ außerdem noch als

$$\mu_{\{1,2,9\}} = \mu_1 \cdot 1/\mu_1 \cdot \lambda^2/\varrho = \lambda^2/\varrho \quad \text{und ebenso} \quad \mu_{\{3,4,9\}} = \lambda^2/\varrho$$

vor, also mindestens 3-fach. Daher folgt die Behauptung mit Lemma 7. □

Nach Lemma 8 und 9 bleiben nun nur noch die folgenden Fälle zu untersuchen:

I. $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = 1/\varrho$ und
a) $\mu_7 = 1/\varrho$, $\mu_9 = \lambda/\varrho$, b) $\mu_7 = \mu_9 = \lambda/\varrho$;

II. $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \lambda/\varrho$ und
a) $\mu_7 = \lambda/\varrho$, $\mu_9 = 1/\varrho$, b) $\mu_7 = \mu_9 = 1/\varrho$.

LEMMA 10: Der Fall I ist unmöglich.

Beweis: Da $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = 1/\varrho$, treten als μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 6\}$ folgende Eigenwerte auf:

$$\varrho^{3-\nu} \quad \binom{6}{\nu}\text{-fach für} \quad \nu = 0, \ldots, 6,$$

und zwar für ungerades ν auf $C^+(\tilde{\sigma})$, für gerades ν auf $C^-(\tilde{\sigma})$, also

auf $C^+(\tilde{\sigma})$: ϱ^2 und $1/\varrho^2$ 6-fach, 1 20-fach,

auf $C^-(\tilde{\sigma})$: ϱ^3 und $1/\varrho^3$ 1-fach, ϱ und $1/\varrho$ 15-fach.

a) Im Falle $\mu_7 = 1/\zeta$ sind die μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 8\}$ gegeben durch

$$\zeta^{4-\nu} \qquad \binom{8}{\nu}\text{-fach} \qquad \text{für } \nu = 0, \ldots, 8,$$

also insbesondere auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$ ζ und $1/\zeta$ 56-fach. Da weiter $\mu_9 = \lambda/\zeta$, $\mu_{10} = \zeta/\lambda$, kommen als μ_M insgesamt (unter anderem) λ und $1/\lambda$ je 56-fach auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$ vor, Widerspruch zu Lemma 7.

b) Im Falle $\mu_7 = \lambda/\zeta$ sind die μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 7\}$

auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$: ζ^2 und $1/\zeta^2$ 6-fach, $\quad 1 \quad$ 20-fach,
$\qquad\qquad$ $\lambda\zeta^2$ und λ/ζ^4 1-fach, λ und λ/ζ^2 15-fach,

auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$: ζ^3 und $1/\zeta^3$ 1-fach, ζ und $1/\zeta$ 15-fach,
$\qquad\qquad$ $\lambda\zeta$ und λ/ζ^3 6-fach, λ/ζ 20-fach.

Da weiter $\mu_8 = \zeta/\lambda$, sind die μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 8\}$

auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$ unter anderem λ und $1/\lambda$ 15-fach,

auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$ unter anderem ζ und $1/\zeta$ 30-fach.

Weiter ist $\mu_9 = \lambda/\zeta$, und als μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 9\}$ kommen unter anderem vor

auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ 45-fach, $1/\lambda$ 15-fach,

auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$: $\qquad 1/\zeta$ 45-fach.

Da wegen $\mu_{10} = \zeta/\lambda$ auch unter den μ_M mit $10 \in M$ der Wert $1/\lambda$ vorkommt, scheidet die Möglichkeit $\lambda = 1/\lambda$ aus. Damit kommt aber λ auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$ schon zu oft vor. $\square$

<u>LEMMA 11</u>: Der Fall II ist unmöglich.

<u>Beweis</u>: Es ist $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \lambda/\zeta$; also sind die μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 6\}$ dieses Mal

auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ^2/ζ^2 und ζ^2/λ^2 6-fach, $\quad 1 \quad$ 20-fach, auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ^3/ς^3 und ς^3/λ^3 1-fach, λ/ς und ς/λ 15-fach.

a) Ist auch $\mu_7 = \lambda/\varsigma$, so sind die μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 8\}$ unter anderem

auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ/ς und ς/λ 56-fach.

Da $\mu_9 = 1/\varsigma$, $\mu_{10} = \varsigma$, ergeben sich insgesamt als μ_M unter anderem

auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ und $1/\lambda$ mindestens 56-fach.

Das ist aber zu oft.

b) Ist $\mu_7 = 1/\varsigma$, so kommen als μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 7\}$ insbesondere vor

auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ/ς^2 und $1/\lambda$ 15-fach,

auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ/ς und ς/λ 15-fach.

Weiter ist $\mu_8 = \varsigma$, also sind die μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 8\}$ unter anderem

auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ und $1/\lambda$ 15-fach,

auf $C^-(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ/ς und ς/λ 30-fach.

Da $\mu_9 = 1/\varsigma$, sind unter den μ_M mit $M \subseteq \{1, \ldots, 9\}$ unter anderem

auf $C^+(\tilde{\mathfrak{S}})$: λ 15-fach, $1/\lambda$ 45-fach.

Da λ auch als μ_M mit $10 \in M$ vorkommt, kann nicht $\lambda = 1/\lambda$ sein; also kommt $1/\lambda$ zu oft vor. $\square$

Mit Lemma 8 - 11 ist gezeigt, daß für ein $s \in \mathrm{Spin}(10,\mathbb{R})$ die in Lemma 7 geforderte Verteilung der Eigenwerte von $\chi(s)$ auf $C(\tilde{\mathfrak{S}})$ nicht möglich ist. Also:

<u>THEOREM 2</u>: Das 16-dimensionale irreduzible beschränkte symmetrische Ausnahmegebiet besitzt keine Spiegelungen.

KAPITEL II. SPIEGELUNGEN IN BESCHRÄNKTEN SYMMETRISCHEN GEBIETEN VOM KEGEL-TYP

Dieses Kapitel enthält eine in sich geschlossene Theorie der Spiegelungen der Gebiete vom Kegel-Typ, die auf ihrer Beschreibung durch Jordan-Algebren beruht. Dabei wird sich herausstellen, daß auch das 27-dimensionale Ausnahmegebiet spiegelungsfrei ist.

Hier eine kurze Übersicht:

In §1 wird die Konstruktion der beschränkten symmetrischen Gebiete vom Kegel-Typ aus formal-reellen Jordan-Algebren nach U.Hirzebruch beschrieben. In den Paragraphen 2 und 3 werden dann die Spiegelungen dieser Gebiete berechnet, und zwar werden in §2 die möglichen Spiegelungen in 4 Typen eingeteilt, in §3 wird dann ausgerechnet, welche Typen von Spiegelungen in welchen Gebieten auftreten. Das Haupthilfsmittel dabei bilden vollständige Orthogonalsysteme von Idempotenten und die zugehörigen Peirce-Zerlegungen.

§1. DIE KONSTRUKTION BESCHRÄNKTER SYMMETRISCHER GEBIETE AUS FORMAL-REELLEN JORDAN-ALGEBREN

Sei A eine formal-reelle Jordan-Algebra mit dem Einselement e.

$$\sigma : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(x,y) := \mathrm{Spur}\, L(xy),$$

ist dann eine positiv-definite symmetrische Bilinearform auf A ([1], S.320, Satz 3.4). Da σ eine assoziative Bilinearform ist, ist $L(x)$ für jedes $x \in A$ bezüglich σ selbstadjungiert. Ist W ein Algebra-Automorphismus von

A, so gilt

$$L(Wx)y = Wx\cdot y = W(x\cdot W^{-1}y) = W\circ L(x)\circ W^{-1}y$$

für alle $x,\ y\in A$, also

$$\begin{aligned}\sigma(Wx,Wy) &= \mathrm{Spur}\ L(Wx\cdot Wy) = \mathrm{Spur}\ L(W(xy))\\ &= \mathrm{Spur}(W\circ L(xy)\circ W^{-1}) = \mathrm{Spur}\ L(xy) = \sigma(x,y);\end{aligned}$$

daher ist W bezüglich σ eine orthogonale Abbildung.

Eine Teilmenge Y eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums V heißt Positivitätsbereich, wenn gilt:

(i) Y ist offen und nicht leer;

(ii) es gibt eine positiv-definite symmetrische Bilinearform β auf V mit
   a) $\beta(y,z) > 0$ für alle $y,\ z\in Y$,
   b) für jedes $x\in V-Y$ gibt es ein $y\in Y^{-}-\{0\}$ mit $\beta(x,y)\leq 0$.

β heißt die Charakteristik des Positivitätsbereichs Y (und ist als solche nicht eindeutig bestimmt). Ein Positivitätsbereich Y heißt homogen, wenn die lineare Automorphismengruppe

$$\Sigma(Y) := \{W\in GL(V)\ |\ W[Y] = Y\}$$

transitiv auf Y operiert.

Für unsere formal-reelle Jordan-Algebra A sei A^{*} die Menge der invertierbaren Elemente, A_e^{*} die Zusammenhangskomponente von A^{*}, in der e liegt (A^{*} ist offen in A); für eine Teilmenge $B\subseteq A$ sei $B^2 = \{x^2\ |\ x\in B\}$, B^0 der offene Kern von B. Damit gilt: Die Menge

$$Y := A_e^{*} = (A^2)^0 = (A^{*})^2 = \{x\in A\ |\ L(x) > 0 \text{ bzgl. } \sigma\}$$

ist ein homogener Positivitätsbereich mit der Charakteristik σ ([1], S. 315-323). Man erhält auf diese Weise alle homogenen Positivitätsbereiche ([6], §2, §3). (Man erhält allerdings nicht alle möglichen Charakteristiken: siehe die ausführliche Untersuchung dieser Frage in [5].)

Sei $\tilde{A} := A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = A + iA$ die Komplexifizierung von A. Die Menge

$$H := A + iY \subseteq \tilde{A}$$

heißt Halbraum. H ist ein Gebiet in $\tilde{A}$ mit $ie \in H$ ([6], S. 400/401). Die Abbildung

$$\psi: H \dashrightarrow \tilde{A}, \quad z \longmapsto (z-ie)(z+ie)^{-1},$$

ist ein analytischer Isomorphismus von H auf ein beschränktes symmetrisches Gebiet $M := \psi[H]$ in $\tilde{A}$ ([6], S.401/402). Dabei geht der Punkt $ie \in H$ in den Punkt $0 \in M$ über.

DEFINITION 5: (i) Das eben konstruierte beschränkte symmetrische Gebiet M heißt das zu A gehörige beschränkte symmetrische Gebiet.

(ii) Ein beschränktes symmetrisches Gebiet heißt vom Kegel-Typ, wenn es isomorph zu einem zu einer formal-reellen Jordan-Algebra gehörigen beschränkten symmetrischen Gebiet ist.

Die Bezeichnung „Kegel-Typ" ist dadurch motiviert, daß Positivitätsbereiche „positive Kegel" im Sinne von Ordnungsrelationen in Vektorräumen sind.

<u>SATZ 9</u>: Sei A eine formal-reelle Jordan-Algebra, M das zugehörige beschränkte symmetrische Gebiet. Dann gilt:

(i) M ist genau dann irreduzibel, wenn A einfach ist.

(ii) Ist $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s$ die Zerlegung von A in einfache Ideale und M_i das zu A_i gehörige Gebiet, so ist

$M = M_1 \times \ldots \times M_s$ eine Zerlegung von M in irreduzible Gebiete.

Beweis: Es ist zu zeigen: Ist $A = A_1 \oplus A_2$ eine direkte Zerlegung von A in zwei Ideale, M_i für i = 1, 2 das zu A_i gehörige Gebiet, so ist $M = M_1 \times M_2$.

Der erste Schritt ist: Für die zugehörigen Positivitätsbereiche Y, Y_1, Y_2 ist $Y = Y_1 \times Y_2$. Das ist aber trivial mit der Aussage

$$y \in Y \Longleftrightarrow y = x^2 \text{ für ein } x \in A^*$$

und mit den Rechenregeln für direkte Summen von Algebren (siehe auch [5], §4).

Daraus folgt unmittelbar für die zugehörigen Halbräume H, H_1, H_2, daß $H = H_1 \times H_2$ (siehe auch [6], §11).

Die Aussage für die beschränkten symmetrischen Gebiete folgt nun wieder einfach daraus, daß in direkten Summen die Bildung von inversen Elementen und die Multiplikation komponentenweise ausgeführt werden, mit der Definition von ψ: Für $z \in H$, $z = z_1 + z_2$ mit $z_i \in \tilde{A}_i$, ist $\psi(z) = \psi(z_1) + \ (z_2)$.

Zur Vollständigkeit des Beweises fehlt noch die Umkehrung von (i), nämlich „A einfach $\Rightarrow$ M irreduzibel". Dieser Schluß ergibt sich am einfachsten aus der umseitig folgenden Tabelle. $\square$

Der Zerlegung des Gebiets M in irreduzible Gebiete entspricht also genau die Zerlegung der Jordan-Algebra A in einfache Algebren. Insbesondere:

KOROLLAR: Ein beschränktes symmetrisches Gebiet ist genau dann vom Kegel-Typ, wenn alle seine irreduziblen Faktoren vom Kegel-Typ sind.

Die Zuordnung zwischen den einfachen formal-reellen Jordan-Algebren und den irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebieten vom Kegel-Typ ist in der folgenden Tabelle wiedergegeben (nach [6], S.396. In [6] ist der Beweis nur für L_n durchgeführt, in [8] der Beweis für das Ausnahmegebiet, auf das es uns hauptsächlich ankommt. Die fehlenden Beweise sind, wie in [6] bemerkt, nicht schwer. Die Zuordnung ist überdies aus Dimensionsgründen plausibel.) In der Spalte A stehen die formal-reellen Algebren, unter $\tilde{A}$ ihre Komplexifizierungen. Unter M steht das zugehörige Gebiet. Dabei ist zu beachten, daß einige der Gebiete mit den gleich bezeichneten aus §1 der Einleitung nicht übereinstimmen, sondern nur derselben Isomorphieklasse angehören.

A	$\tilde{A}$	Dimension	Grad	M
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	1	1	$M_{1,1}$
$[\mathbb{R}^n, \mu, e_1]$	$[\mathbb{C}^n, \mu, e_1]$	$n \geq 3$	2	L_n
$S_r(\mathbb{R})$	$S_r(\mathbb{C})$	$\frac{1}{2}r(r+1)$	$r \geq 3$	S_r
$H_r(\mathbb{C})$	$M_r^+(\mathbb{C})$ *)	r^2	$r \geq 3$	$M_{r,r}$
$H_r(\mathbb{H})$	$H_r(\mathbb{H}^{\mathbb{C}})$	$r(2r-1)$	$r \geq 3$	T_{2r}
$H_3(\mathbb{O})$	$H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$	27	3	R_{27}

*) nur bis auf Isomorphie, vgl. [1], S.331, Beweis von Satz 5.6.

Nach den Anmerkungen auf Seite 10 und Seite 6 sind alle aufgeführten Gebiete paarweise nicht analytisch isomorph. Die Bezeichnungen für die Gebiete werden im Rest dieses Kapitels stets im Sinne dieser Tabelle und nicht im Sinne von §1 der Einleitung verwendet.

Der Ausgangspunkt für die Bestimmung der Spiegelungen ist der folgende Satz über die analytischen Automorphismen des Gebiets M:

THEOREM 3 (U.Hirzebruch): Sei A eine formal-reelle Jordan-Algebra, M das zugehörige beschränkte symmetrische Gebiet. Ferner sei

$$U := \{u \in A \mid u\bar{u} = e\} \subseteq \tilde{A}.$$

Dann besteht die Stabilitätsgruppe $\Sigma(M)$ von $0 \in M$ in der Automorphismengruppe $\Omega(M)$ genau aus den Abbildungen $P(u) \circ W$, wobei $u \in U$ und W ein reeller Automorphismus der Algebra $\tilde{A}$ ist (d.h., die Fortsetzung eines Automorphismus von A auf $\tilde{A}$).

([6], S.408, Satz 4 und Satz 5, und [1], S.327, Satz 1.5 c)

BEMERKUNGEN: 1.) Im eindimensionalen Fall $A = \mathbb{R}$, $\tilde{A} = \mathbb{C}$, ist $U = U(1)$, d.h., der Rand des Einheitskreises.

2.) Nach [6], S.407/408, kann man die Menge U charakterisieren als die Menge aller Linearkombinationen $\eta_1 c_1 + \ldots + \eta_s c_s$, wobei die $\eta_i \in U(1)$ und $\{c_1, \ldots, c_s\}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem von A ist.

3.) Man sieht leicht, daß das Gebiet M Normalform im Sinne von Definition 2 hat: Für (iii) etwa ist $u = \lambda^{1/2} e$ und $W = 1_{\tilde{A}}$ zu wählen.

4.) Ist $u = \eta_1 c_1 + \ldots + \eta_s c_s \in U$, $\tilde{A} = \bigoplus_{i \leq j} \tilde{A}_{ij}$ die

Peirce-Zerlegung bezüglich $\{c_1, \ldots, c_s\}$ mit den Projektionen C_{ij} (vgl. Einleitung, §3, S.12), so gilt natürlich

$$P(u) = \sum_{i \leq j} \eta_i \eta_j C_{ij}.$$

§2. KLASSIFIKATION DER SPIEGELUNGEN IN BESCHRÄNKTEN SYMMETRISCHEN GEBIETEN VOM KEGEL-TYP

Sei stets A eine formal-reelle Jordan-Algebra und M das zugehörige beschränkte symmetrische Gebiet, $S = P(u) \circ W$ (mit den Bezeichnungen aus Theorem 3) eine Spiegelung aus $\Sigma(M)$ im Punkte $0 \in M$ mit dem einfachen Eigenwert $\lambda \neq 1$. Das Adjektiv „reell" bezieht sich immer auf die feste reelle Form A von $\tilde{A}$, „Spiegelung" heißt immer Spiegelung von M in 0.

Die drei folgenden Sätze geben eine Einteilung aller vorkommenden Spiegelungen in vier Klassen A - D.

<u>SATZ 10</u>: (i) Ist $S = P(u) \circ W$ Spiegelung, so ist entweder $u^2 = e$, oder $u^2 - e$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ.

(ii) Ist $u^2 = e$, so ist S reeller Automorphismus von A.

<u>Beweis</u>: (ii) Es ist $\bar{u} = u^{-1} = u$, also u reell und somit $P(u)$ reell. Da $u^2 = e$, ist $P(u)$ Automorphismus.

(i) Sei $u^2 \neq e$. Dann ist $Se = P(u)We = P(u)e = u^2 \neq e$, also e nicht im Eigenraum $\tilde{A}_1$ von S zum Eigenwert 1 enthalten; damit gilt $\tilde{A} = \mathbb{C}e \oplus \tilde{A}_1$. Sei nun z_λ ein Eigenvektor zu λ. Dann hat z_λ nach Multiplikation mit einem skalaren Faktor o.B.d.A. die Gestalt $z_\lambda = e + z_1$ mit $z_1 \in A_1$.

Nun ist

$$u^2 - e + z_\lambda = u^2 + z_1 = Se + Sz_1 = Sz_\lambda = \lambda z_\lambda,$$

also ist $u^2 - e = (\lambda-1)z_\lambda$ Eigenvektor zum Eigenwert λ. $\square$

Wir behandeln zunächst den Fall $u^2 = e$ gesondert:

<u>SATZ 11</u>: Ist S ein reeller Automorphismus von A und Spiegelung von M, so ist $\lambda = -1$, und es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

A) Es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem $\{d_1, d_2, d_3\}$ von A mit

$$Sd_1 = d_2, \quad Sd_2 = d_1, \quad Sd_3 = d_3.$$

B) Es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem $\{d_1, d_2\}$ von A mit

$$Sd_1 = d_2, \quad Sd_2 = d_1.$$

<u>Beweis</u>: Hat A den Grad 1, so ist $A = \mathbb{R}$, und es gibt nur den Automorphismus $1_{\mathbb{R}}$, der auf $\tilde{A} = \mathbb{C}$ zu $1_{\mathbb{C}}$ fortgesetzt wird. Dieser ist aber keine Spiegelung. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß A mindestens zwei orthogonale Idempotente besitzt.

Da $S|_A$ bezüglich der positiv-definiten symmetrischen Bilinearform σ von A aus §1 eine orthogonale Abbildung ist, muß mit λ auch $1/\lambda$ Eigenwert von S sein. Das geht aber bei einer Spiegelung nur, falls $\lambda = -1$; insbesondere ist dann $S^2 = 1_{\tilde{A}}$.

Zu dem reellen Eigenwert -1 gibt es einen reellen Eigenvektor $x \in A$, also $Sx = -x$. Sei

$$x = \xi_1 d_1 + \ldots + \xi_s d_s \quad \text{(notwendig } s \leq r = \text{Grad } A)$$

die Minimalzerlegung mit den Idempotenten $d_1, \ldots, d_s \in \mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[-x]$, die die sämtlichen primitiven Idempotente dieser Unteralgebra sind. $Sx = -x$ hat dann die Minimalzerlegung

$$-\xi_1 d_1 - \ldots -\xi_s d_s = -x = Sx = \xi_1 Sd_1 + \ldots + \xi_s Sd_s,$$

wobei die Sd_j wieder sämtliche primitiven Idempotente der Unteralgebra $\mathbb{R}[x] = \mathbb{R}[-x]$ sein müssen. Wegen der Eindeutigkeit der Minimalzerlegung folgt daraus (o.B.d.A.)

$$Sd_1 = d_2, \ldots, Sd_{2k-1} = d_{2k},$$
$$\xi_1 = -\xi_2, \ldots, \xi_{2k-1} = -\xi_{2k} \qquad \text{mit} \quad k = \left[\frac{s}{2}\right],$$

und falls s ungerade, $\xi_s = 0$, $Sd_s = d_s$. Insbesondere ist der Fall $s = 1$ unmöglich, da dann $x = 0$ folgen würde.

Wäre nun $s \geq 4$, so gäbe es zum Eigenwert -1 die linear unabhängigen Eigenvektoren d_1-d_2 und d_3-d_4, Widerspruch. Es ist daher $s = 3$ oder $s = 2$, und wir haben den Fall A oder B erhalten. $\square$

Zur Behandlung des Falles $u^2 \neq e$ sind die beiden folgenden Lemmata nötig (wobei weiter stets vorausgesetzt wird, daß $S = P(u) \circ W$ Spiegelung mit dem Eigenwert $\lambda \neq 1$ ist).

<u>LEMMA 12</u>: Ist $u^2 \neq e$, so gilt $W(u^2-e) = \lambda(e-\bar{u}^2)$, und W bildet die assoziative Unteralgebra $C[u^2]$ auf sich selbst ab.

<u>Beweis</u>: Anwendung von $P(\bar{u}) = P(u^{-1}) = P(u)^{-1}$ auf die Gleichung $P(u)W(u^2-e) = \lambda(u^2-e)$ ergibt

$$W(u^2-e) = \lambda P(\bar{u})(u^2-e) = \lambda(e-\bar{u}^2).$$

Die zweite Behauptung folgt daraus, daß wegen $\bar{u}^2 = (u^2)^{-1}$ nach [1], S.142, Satz 2.1,

$$\mathbb{C}[u^2] = \mathbb{C}[\bar{u}^2] = \mathbb{C}[u^2-e] = \mathbb{C}[\bar{u}^2-e]. \qquad \square$$

Sei nun $\{c_1, \ldots, c_r\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von A, so daß nach der Bemerkung 2 zu Theorem 3 u die Form

$$u = \eta_1 c_1 + \ldots + \eta_r c_r \quad \text{mit } \eta_1, \ldots, \eta_r \in U(1)$$

hat. (Da r der Grad der Algebra ist, sind die c_i primitiv; die η_i sind nicht notwendig verschieden.) Damit ist

$$u^2 = \eta_1^2 c_1 + \ldots + \eta_r^2 c_r.$$

Seien o.B.d.A. $\eta_1^2, \ldots, \eta_s^2$ (mit $s \leq r$) die verschiedenen unter den η_j^2. Dann sind die

$$d_j := \sum_{\eta_k^2 = \eta_j^2} c_k \qquad \text{für } j = 1, \ldots, s$$

nach [1], S.22, Satz 4.2, gerade die primitiven Idempotente der assoziativen Algebra $\mathbb{C}[u^2]$.

<u>LEMMA 13</u>: W operiert als Permutation π der Ordnung 2 auf der Menge $\{1, \ldots, s\}$ der Indizes von $d_1, \ldots, d_s$, und zwar gilt

$$Wd_j = d_k \iff \eta_j^2 - 1 = \lambda\cdot(1 - \bar{\eta}_k^2).$$

<u>Beweis</u>: Der Automorphismus $W|_{\mathbb{C}[u^2]}$ der Unteralgebra $\mathbb{C}[u^2]$ erhält die Eigenschaft „primitives Idempotent". Daher ist $W[\{d_1, \ldots, d_s\}] = \{d_1, \ldots, d_s\}$.

Sei also nun $Wd_j = d_{\pi(j)}$. Dann ist

$$(\eta_1^2-1)d_{\pi(1)} + \ldots + (\eta_s^2-1)d_{\pi(s)} = W(u^2-e)$$
$$= \lambda(e-\bar{u}^2) = \lambda(1-\bar{\eta}_1^2)d_1 + \ldots + \lambda(1-\bar{\eta}_s^2)d_s.$$

Da diese Zerlegung wieder (nach [1], S.22, Satz 4.2) eine eindeutige Minimalzerlegung ist, folgt

$$Wd_j = d_{\pi(j)} = d_k \iff \eta_j^2 - 1 = \lambda(1-\bar{\eta}_k^2).$$

Damit gilt aber auch

$$1-\bar{\eta}_k^2 = \bar{\lambda}(\eta_j^2-1), \quad \text{also} \quad \eta_k^2-1 = \lambda(1-\bar{\eta}_j^2),$$

also $Wd_k = d_j$ und somit $\pi = \pi^{-1}$. $\square$

BEMERKUNGEN: 1.) $\eta_j^2 = 1$ kann höchstens für ein j vorkommen, da ja $\eta_1^2, \ldots, \eta_s^2$ verschieden sein sollten; in diesem Fall gilt natürlich $Wd_j = d_j$.

2.) Für jedes $j = 1, \ldots, s$ ist $P(u)d_j = \eta_j^2 d_j$.

<u>SATZ 12</u>: Ist $S = P(u)\circ W$ Spiegelung von M, so tritt einer der folgenden Fälle ein:

A) Es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem $\{d_1, d_2, d_3\}$ von A, so daß

$$u^2 = \rho d_1 + \bar{\rho} d_2 + d_3 \qquad \text{mit } \rho \in U(1) \quad \text{und}$$

$$Wd_1 = d_2, \quad Wd_2 = d_1, \quad Wd_3 = d_3.$$

B) Es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem $\{d_1, d_2\}$ von A, so daß

$$u^2 = \rho d_1 + \bar{\rho} d_2 \qquad \text{mit } \rho \in U(1) \quad \text{und}$$

$$Wd_1 = d_2, \quad Wd_2 = d_1.$$

In den Fällen A und B ist $\lambda = -1$.

C) Es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem $\{d_1, d_2\}$ von A, so daß

$$u^2 = \lambda d_1 + d_2 \quad \text{und} \quad Wd_1 = d_1, \quad Wd_2 = d_2.$$

D) Es ist $u^2 = \lambda e$, d.h., $P(u) = \lambda 1_{\tilde{A}}$, $P(u)\circ W = \lambda W$.

Beweis: Falls $u^2 = e$, haben wir schon in Satz 11 gesehen, daß Fall A oder B (mit $\rho=1$) eintreten muß. Sei also von jetzt an $u^2 \neq e$. Wir greifen auf Lemma 13 zurück und unterscheiden zwei Fälle:

I. Es gibt ein $j \neq k$ mit $Wd_j = d_k$. Dann ist

$$P(u) \circ W(\eta_j d_j \pm \eta_k d_k) = P(u)(\eta_j d_k \pm \eta_k d_j)$$
$$= \eta_j \eta_k^2 d_k \pm \eta_k \eta_j^2 d_j = \pm \eta_j \eta_k (\eta_j d_j \pm \eta_k d_k).$$

Es sind also $\pm\eta_j\eta_k$ Eigenwerte von S. Damit ist gezeigt:

Der Fall $Wd_j = d_k$ mit $j \neq k$ kann nur einmal vorkommen, und das auch nur bei $\lambda=-1$. Es muß dann $\eta_j\eta_k = \pm 1$, also $\eta_j^2\eta_k^2 = 1$ sein.

Alle übrigen d_l werden von W auf sich selbst abgebildet, also

$$P(u)Wd_l = P(u)d_l = \eta_l^2 d_l \quad \text{für} \quad l \neq j,\ k,$$

also $\eta_l^2 = 1$, da der Eigenwert $\neq 1$ schon vergeben ist. Dieser Fall kann nach der Bemerkung 1 zu Lemma 13 also auch höchstens einmal vorkommen. Daher ist $s = 2$ oder 3 (denn $s=1$ scheidet durch die Voraussetzung I aus).

Im Fall I kann also nur gelten (mit $\rho = \eta_j^2 \neq 1$ und bei geeigneter Numerierung):

$$u^2 = \rho d_1 + \bar{\rho} d_2 + d_3 \quad \text{oder} \quad u^2 = \rho d_1 + \bar{\rho} d_2.$$

Damit tritt der Fall A oder B ein.

II. Für alle $j = 1, \ldots, s$ gilt $Wd_j = d_j$. Da nun stets $P(u)Wd_j = \eta_j^2 d_j$, sind alle η_j^2 Eigenwerte von S. Da es davon nur zwei verschiedene gibt und $u^2 \neq e$, muß einer der beiden Fälle C, D eintreten. $\square$

§3. EXPLIZITE BESTIMMUNG ALLER SPIEGELUNGEN IN BESCHRÄNKTEN SYMMETRISCHEN GEBIETEN VOM KEGEL-TYP

In den folgenden vier Sätzen werden die Fälle A - D einzeln behandelt. Die Ergebnisse werden abschließend in zwei Theoremen zusammengefaßt.

SATZ 13 (Fall A): Sei A eine formal-reelle Jordan-Algebra, M das zugehörige beschränkte symmetrische Gebiet. Sei weiter W ein reeller Automorphismus von $\tilde{A}$, $u \in \tilde{A}$ mit

$$u^2 = \rho d_1 + \bar{\rho} d_2 + d_3,$$

wobei $\rho \in U(1)$, $\{d_1, d_2, d_3\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von A und $Wd_1 = d_2$, $Wd_2 = d_1$, $Wd_3 = d_3$. $S = P(u) \circ W$ sei Spiegelung.

Dann ist M ein reduzibles Gebiet, $M = M_1 \times M_2$, wobei S auf M_2 die Identität ist und auf M_1 der Fall B eintritt.

Beweis: Sei $\tilde{A} = \bigoplus_{i \leq j} \tilde{A}_{ij}$ die Peirce-Zerlegung von $\tilde{A}$ bezüglich $\{d_1, d_2, d_3\}$. Dann sieht man sofort aus der Definition der $\tilde{A}_{ij}$:

$$W[\tilde{A}_{11}] = \tilde{A}_{22}, \quad W[\tilde{A}_{22}] = \tilde{A}_{11}, \quad W[\tilde{A}_{33}] = \tilde{A}_{33},$$
$$W[\tilde{A}_{12}] = \tilde{A}_{12}, \quad W[\tilde{A}_{13}] = \tilde{A}_{23}, \quad W[\tilde{A}_{23}] = \tilde{A}_{13},$$

ferner $P(u)[\tilde{A}_{ij}] = \tilde{A}_{ij}$ für alle i, j nach der Bemerkung 4 zu Theorem 3.

S läßt also $\tilde{A}_{11} \oplus \tilde{A}_{12} \oplus \tilde{A}_{22} = \tilde{A}_0(d_3)$, $\tilde{A}_{13} \oplus \tilde{A}_{23} = \tilde{A}_{1/2}(d_3)$ und $\tilde{A}_{33} = \tilde{A}_1(d_3)$ fest, wobei der Eigenwert -1 auf $\tilde{A}_0(d_3)$ angenommen wird. Auf $\tilde{A}_{1/2}(d_3)$ kann S daher nur den Eigenwert 1 haben, S muß also hier die Identität sein (da diagonalisierbar). Das geht aber wegen $S[\tilde{A}_{13}] = \tilde{A}_{23}$

nur, falls $\tilde{A}_{13} = \tilde{A}_{23} = 0$, also $\tilde{A}_{1/2}(d_3) = 0$.
Damit ist $\tilde{A} = \tilde{A}_0(d_3) \oplus \tilde{A}_1(d_3)$ eine direkte Zerlegung in Ideale, wobei S auf $\tilde{A}_1(d_3)$ die Identität ist und auf $\tilde{A}_0(d_3)$ der Fall B eintritt. Die Behauptung folgt mit Satz 9. $\square$

<u>SATZ 14</u> (Fall B): Sei A eine formal-reelle Jordan-Algebra vom Grad r, M das zugehörige beschränkte symmetrische Gebiet. Sei weiter W ein reeller Automorphismus von $\tilde{A}$, $u \in \tilde{A}$ mit

$$u^2 = \rho d_1 + \bar{\rho} d_2,$$

wobei $\rho \in U(1)$, $\{d_1, d_2\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von A und $Wd_1 = d_2$, $Wd_2 = d_1$. $S = P(u) \circ W$ sei Spiegelung.

Dann sind d_1 und d_2 primitive Idempotente, d.h., r = 2, also $M \cong M_{1,1} \times M_{1,1}$ oder $M \cong L_n$, und S hat die Form

$$Sd_1 = \bar{\rho} d_2, \quad Sd_2 = \rho d_1, \quad S|_{\tilde{A}_{1/2}(d_1)} = 1_{\tilde{A}_{1/2}(d_1)}.$$

Diese Abbildung ist tatsächlich Spiegelung in $\Sigma(M)$.

<u>Beweis</u>: Sei $\tilde{A} = \tilde{A}_{11} \oplus \tilde{A}_{12} \oplus \tilde{A}_{22}$ die Peirce-Zerlegung von $\tilde{A}$ bezüglich $\{d_1, d_2\}$. Dann ist wieder unmittelbar klar, daß

$$W[\tilde{A}_{11}] = \tilde{A}_{22}, \quad W[\tilde{A}_{22}] = \tilde{A}_{11}, \quad W[\tilde{A}_{12}] = \tilde{A}_{12},$$
$$P(u)[\tilde{A}_{ij}] = \tilde{A}_{ij} \quad \text{für alle } i, j.$$

Also ist S auf $\tilde{A}_{12}$ die Identität, da der Eigenwert -1 in $\tilde{A}_{11} \oplus \tilde{A}_{22}$ „aufgebraucht" wird. Wäre nun $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{A}_{11} \geq 2$, so gäbe es zwei linear unabhängige Vektoren $z_1, z_2 \in \tilde{A}_{11}$, also die beiden linear unabhängigen Eigenvektoren $z_1 - Sz_1$

und $z_2 - Sz_2$ zum Eigenwert -1. Also ist $\tilde{A}_{11} = \mathbb{C}d_1$, ebenso $\tilde{A}_{22} = \mathbb{C}d_2$; damit sind d_1 und d_2 primitiv, und $r=2$ ist bewiesen.

Es ist also nur noch zu zeigen, daß die angegebene Abbildung tatsächlich in $\Sigma(M)$ liegt:

Wir wählen $\eta \in U(1)$ mit $\eta^2 = \rho$, $u = \eta d_1 \pm \bar{\eta} d_2$ und einen reellen Automorphismus W von $\tilde{A}$ mit $Wd_1 = d_2$, $Wd_2 = d_1$, $W|_{\tilde{A}_{12}} = \pm 1_{\tilde{A}_{12}}$. Daß es diesen Automorphismus gibt, ist im Falle $A \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ trivial, da dann d_1 und d_2 die einzigen Idempotente von A sind ($\neq e$). Andernfalls sei o.B.d.A. $A = [\mathbb{R}^n, u, e_1]$. Für das spezielle Orthonormalsystem $\{d_1, d_2\} = \{c_1, c_2\}$ steht der gesuchte Automorphismus in Lemma 1; ist $\{d_1, d_2\}$ ein anderes vollständiges Orthonormalsystem von A, so sei W_o ein Automorphismus von A mit $W_o d_1 = c_1$, $W_o d_2 = c_2$. Die Konjugation des passenden Automorphismus aus Lemma 1 mit W_o ergibt den gesuchten Automorphismus. $\square$

<u>SATZ 15</u> (Fall C): Sei A eine formal-reelle Jordan-Algebra, M das zugehörige beschränkte symmetrische Gebiet, W ein reeller Automorphismus von $\tilde{A}$, $u \in \tilde{A}$. Es sei $\{d_1, d_2\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von A mit $Wd_1 = d_1$, $Wd_2 = d_2$. $S = P(u) \circ W$ sei Spiegelung mit dem Eigenwert $\lambda \neq 1$, und es sei

$$u^2 = \lambda d_1 + d_2.$$

Dann ist M ein reduzibles Gebiet, $M = M_1 \times M_2$, wobei S auf M_2 die Identität ist und auf M_1 der Fall D eintritt.

<u>Beweis</u>: Sei $\tilde{A} = \tilde{A}_{11} \oplus \tilde{A}_{12} \oplus \tilde{A}_{22}$ die Peirce-Zerlegung

bezüglich $\{d_1,d_2\}$. Da $S[\tilde{A}_{ij}] = \tilde{A}_{ij}$ für alle i,j und der Eigenwert λ in $\tilde{A}_{11}$ vorkommt ($Sd_1 = \lambda d_1$!), genügt es wieder zu zeigen: $\tilde{A}_{12} = 0$.

u hat die Gestalt

$$u = \eta c_1 - \eta c_2 + c_3 - c_4 \quad \text{mit} \quad \eta^2 = \lambda,$$

wobei die $c_i \in A$ idempotent oder 0 sind und $c_1+c_2 = d_1$, $c_3+c_4 = d_2$ (Beweis: Beim Quadrieren der in der Bemerkung 2 zu Theorem 3 nach „Zusammenfassung gleicher Koeffizienten" gegebenen Minimalzerlegung von u muß $u^2=\lambda d_1+d_2$ herauskommen). Damit ist

$$\begin{aligned} P(u) &= \lambda\left[P(c_1)+P(c_2)-4L(c_1)L(c_2)\right] + P(c_3)+P(c_4)-4L(c_3)L(c_4) \\ &\quad + 4\eta\left[L(c_1)L(c_3)-L(c_1)L(c_4)-L(c_2)L(c_3)+L(c_2)L(c_4)\right] \\ &= \lambda D_1 + D_2 + \eta D_3, \end{aligned}$$

wobei $D_1|_{\tilde{A}_{12}} = 0$, $D_2|_{\tilde{A}_{12}} = 0$ und $\eta D_3|_{\tilde{A}_{12}} = P(u)|_{\tilde{A}_{12}}$. Da c_1,c_2,c_3,c_4 reell, ist D_3 reell. Außerdem ist auch W reell und $S|_{\tilde{A}_{12}} = 1_{\tilde{A}_{12}}$. Da $S|_{\tilde{A}_{12}} = P(u)\circ W|_{\tilde{A}_{12}} = \eta D_3\circ W|_{\tilde{A}_{12}}$, muß entweder $\tilde{A}_{12} = 0$ oder η reell, also $\eta = \pm 1$ sein und somit $\lambda = 1$, Widerspruch.

Also ist $\tilde{A}_{12} = 0$.

<u>SATZ 16</u> (Fall D): Sei A eine formal-reelle Jordan-Algebra vom Grad r, M das zugehörige beschränkte symmetrische Gebiet, W ein reeller Automorphismus von $\tilde{A}$, $u \in \tilde{A}$. $S = P(u)\circ W$ sei Spiegelung mit dem Eigenwert $\lambda \neq 1$, und es sei

$$u^2 = \lambda e.$$

Dann ist entweder

(i) $r=1$, also $M \cong M_{1,1}$, und S hat die Form $z \longmapsto \lambda z$,

oder

(ii) $r=2$; dann ist $\lambda=-1$, und es ergibt sich der Fall B mit $\rho=-1$.

In diesen beiden Fällen ist S tatsächlich Spiegelung in $\Sigma(M)$.

Beweis: Ist $u^2=\lambda e$, so ist $(\frac{1}{\eta}u)^2 = e$ mit $\eta^2=\lambda$, also $P(\frac{1}{\eta}u) = \frac{1}{\lambda}P(u)$ ein Automorphismus von $\tilde{A}$; da auch $(\frac{1}{\eta}u)\overline{(\frac{1}{\eta}u)} = e$, ist $\frac{1}{\eta}u$ reell, also $\frac{1}{\lambda}P(u)$ ein reeller Automorphismus. Somit ist $S = P(u)\circ W = \lambda W_0$ mit einem reellen Automorphismus W_0 von $\tilde{A}$, der den einfachen Eigenwert 1 und sonst höchstens den Eigenwert $\frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}$ hat.

Ist $r=1$, so ergibt sich sofort (i); andernfalls kommt der Eigenwert $\bar{\lambda}$ von W_0 wirklich vor. Da W_0 eine orthogonale Abbildung ist, ist also $\lambda=-1$ und insbesondere $W_0^2=1_{\tilde{A}}$.

Der Eigenraum zum einfachen Eigenwert 1 von W_0 wird von e aufgespannt. Da W_0 reell ist, gibt es einen Eigenvektor $x\in A$ mit $W_0x = -x$. Sei $x = \xi_1 d_1+ \dots +\xi_s d_s$ die Minimalzerlegung. $W_0x = -x$ hat dann die Minimalzerlegung

$$-\xi_1 d_1- \dots -\xi_s d_s = -x = W_0x = \xi_1 W_0 d_1+ \dots +\xi_s W_0 d_s.$$

Sei o.B.d.A. $\xi_1 \neq 0$ (da $x \neq 0$); dann ist $W_0 d_1 \neq d_1$, also o.B.d.A. $W_0 d_1 = d_2$ und somit auch $W_0 d_2 = d_1$. Damit ist $W_0(d_1+d_2) = d_1+d_2$, also d_1+d_2 Eigenvektor zum Eigenwert 1 und somit

$$d_1 + d_2 = \mu e = \mu(d_1 + \dots + d_s)$$

mit $\mu\in\mathbb{R}$. Es muß also $s = 2$ (und $\mu=1$) sein.

Also ist $u^2 = \lambda e = -d_1-d_2$, und wir befinden uns im Fall B. Insbesondere muß nach Satz 14 $r=2$ sein. $\square$

Vor der abschließenden Zusammenfassung bringen wir die Aussagen für r=2 noch auf eine etwas übersichtlichere Form:

LEMMA 14: Die in Satz 14 konstruierten Spiegelungen S sind in $\Sigma(M)$ zu der Abbildung S_o mit

$$S_o d_1 = d_2, \; S_o d_2 = d_1, \; S_o|\tilde{A}_{12} = 1_{\tilde{A}_{12}}$$

konjugiert.

Beweis: Wir wählen u_o mit $u_o^2 = d_1 + \varrho d_2$. Dann ist $P(u_o)[\tilde{A}_{12}] = \tilde{A}_{12}$ und $P(u_o) \circ S \circ P(u_o)^{-1}|\tilde{A}_{12} = 1_{\tilde{A}_{12}}$.

Ferner ist $P(u_o)^{-1} = P(u_o^{-1})$ und $u_o^{-2} = d_1 + \bar{\varrho} d_2$, also

$$P(u_o)SP(u_o)^{-1}d_1 = P(u_o)Sd_1 = P(u_o)\bar{\varrho}d_2 = \varrho\bar{\varrho}d_2 = d_2,$$

ebenso $P(u_o)SP(u_o)^{-1}d_2 = d_1$, also insgesamt

$$P(u_o) \circ S \circ P(u_o)^{-1} = S_o. \qquad \square$$

KOROLLAR: (i) Die Spiegelungen vom Typ B in $M_{1,1} \times M_{1,1}$ sind alle in $\Sigma(M_{1,1} \times M_{1,1})$ zu

$$(z_1, z_2)^t \longmapsto (z_2, z_1)^t$$

konjugiert.

(ii) Die Spiegelungen in L_n sind alle in $\Sigma(L_n)$ zu

$$(*) \quad (z_1, z_2, \ldots, z_n)^t \longmapsto (-z_1, z_2, \ldots, z_n)^t$$

konjugiert.

Beweis: (i) klar, da $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ nur die beiden Idempotente $(1,0)^t$ und $(0,1)^t$ hat.

(ii) Konjugiert man die in Lemma 14 gefundene Form noch mit einem reellen Automorphismus von $[\mathbb{C}^n, \mu, e_1]$, der

$\{d_1, d_2\}$ in das vollständige Orthonormalsystem $\{c_1, c_2\}$ aus Lemma 1 (ii) überführt, so erhält man, daß alle Spiegelungen zu

$$(**) \quad (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)^t \qquad (z_1, -z_2, z_3, \ldots, z_n)^t$$

konjugiert sind (in $\Sigma(L_n)$). Die Abbildung $(*)$ ist in $\Sigma(M)$, nämlich gleich $P(u) \circ W$, wobei W die kanonische Involution von $\tilde{A}$ (siehe Anmerkung zu Lemma 1) und $u = ie$ ist. Da die Abbildung $(*)$ trivialerweise Spiegelung ist, liegt sie auch in derselben Konjugationsklasse wie $(**)$. $\square$

<u>THEOREM 4</u> (Spiegelungen in irreduziblen beschränkten symmetrischen Gebieten vom Kegel-Typ):
Sei A eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra vom Grad r, M das zugehörige irreduzible beschränkte symmetrische Gebiet. Dann gilt:

(i) Ist $\underline{r \geq 3}$, so hat M keine Spiegelungen.

(ii) Ist $\underline{r = 2}$, so ist $M \cong L_n$ $(n \geq 3)$. M hat nur Spiegelungen der Ordnung 2; diese sind alle zueinander konjugiert. Die Spiegelungen in $\Sigma(M)$ sind genau die in Satz 14 beschriebenen Abbildungen.

(iii) Ist $\underline{r = 1}$, so ist $M \cong M_{1,1}$. M hat Spiegelungen beliebiger Ordnung; jede Spiegelung in $\Sigma(M)$ hat die Form $z \longmapsto \lambda z$ mit einer Einheitswurzel λ.

<u>KOROLLAR</u>: (i) Es gibt keine Spiegelungen in den Gebieten

$$S_r \ (r \geq 3), \quad M_{r,r} \ (r \geq 3), \quad T_{2r} \ (r \geq 3), \quad R_{27}.$$

(ii) In L_n $(n \geq 3)$ gibt es Spiegelungen der Ordnung 2. Diese sind sämtlich zur Abbildung $(*)$ konjugiert.

<u>THEOREM 5</u> (Spiegelungen in reduziblen beschränkten symmetrischen Gebieten vom Kegel-Typ):
Sei M ein beschränktes symmetrisches Gebiet vom Kegel-Typ, $M = M_1 \times \ldots \times M_s$ eine Zerlegung in irreduzible beschränkte symmetrische Gebiete vom Kegel-Typ. Für eine Spiegelung S von M gibt es genau die beiden Möglichkeiten:

(i) M enthält einen Faktor $\cong M_{1,1}$ oder L_n; auf diesem Faktor ist S Spiegelung, auf den übrigen die Identität.

(ii) M enthält zwei Faktoren $\cong M_{1,1}$, o.B.d.A. $M_1 = M_2 = M_{1,1}$, und S ist konjugiert zu der Abbildung

$$(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)^t \mapsto (z_2, z_1, z_3, \ldots, z_n)^t.$$

Insbesondere hat M keine Spiegelungen, wenn kein Faktor $\cong M_{1,1}$ oder L_n ist.

ANMERKUNG: Ein Vergleich mit der Einleitung zeigt, daß Theorem 5 dem Satz (B) und das Korollar zu Theorem 4 dem Satz (C) von Gottschling entspricht. Das Analogon von Satz (A) für die Gebiete vom Kegel-Typ ist schon in [6], S.414, bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H.BRAUN/M.KOECHER; Jordan-Algebren; Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1966

[2] C.CHEVALLEY; The Algebraic Theory of Spinors; Columbia University Press New York, 1954 (second printing 1955)

[3] E.GOTTSCHLING; Reflections in Bounded Symmetric Domains; Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), 693-714

[4] S.HELGASON; Differential Geometry and Symmetric Spaces; Academic Press New York/London, 1962

[5] C.HERTNECK; Positivitätsbereiche und Jordan-Strukturen; Math. Ann. 146 (1962), 433-455

[6] U.HIRZEBRUCH; Halbräume und ihre holomorphen Automorphismen; Math. Ann. 153 (1964), 395-417

[7] ---; Über Jordan-Algebren und kompakte Riemannsche symmetrische Räume vom Rang 1; Math. Z. 90 (1965), 339-354

[8] ---; Über Jordan-Algebren und beschränkte symmetrische Gebiete; Math. Z. 94 (1966), 387-390

[9] M.ISE; On canonical realizations of bounded symmetric domains as matrix spaces; Nagoya Math. J. 42 (1971), 115-133

[10] ---; Realization of irreducible bounded symmetric domain of type (V); Proc. Japan. Acad. 45 (1969), 233-237

[11] N.JACOBSON; Some groups of transformations defined by Jordan algebras II; J. reine angew. Math. 204 (1960), 74-98

[12] ---; Exceptional Lie Algebras; Lecture notes in pure and applied Mathematics, Marcel Dekker Inc. New York, 1971

[13] M.TAKEUCHI; On the fundamental group and the group of isometries of a symmetric space; J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I, 10 (1964), 88-123

[14] J.TITS; Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen; Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1967